Ansätze zur intervallanalytischen Approximationstheorie

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Düsseldorf

vorgelegt von
Wolfgang Witte
aus Groß Welle

Düsseldorf 1981

Ansätze zur intervallanalytischen Approximationstheorie

I n a u g u r a l - D i s s e r t a t i o n

zur

Erlangung des Doktorgrades der

Mathematisch- Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Düsseldorf

vorgelegt von

Wolfgang Witte

aus Groß Welle

Düsseldorf 1981

1. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Ratschek

2. Berichterstatter: Prof. Dr. B. Döring

Tag der mündlichen Prüfung: 11.12.1981

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

§ 1 Einige Grundlagen aus der Intervall-Mathematik 6
1.1 Überblick 6
1.2 Einige intervallarithmetische Grundlagen 7
1.3 Metrik und Norm für den quasilinearen Raum $\langle \mathbb{I}, +, \cdot \rangle$ 11
1.4 Konvergenz und Stetigkeit im quasilinearen, normierten Raum $\langle \mathbb{I}, +, \cdot, \ominus, \|\cdot\|_m \rangle$ 15

§ 2 Einschließende Approximationen für Intervall-Funktionen und Optimalität für einschließende Approximationen 21
2.1 Überblick 21
2.2 Einschließende Approximationen für Intervall-Funktionen, optimale Approximationen 22
2.3 Zusammenhänge mit der Ordnungstheorie 28
2.4 Berechenbare Approximationen, Optimalität 4o

§ 3 Differenzierbarkeit von Intervall-Funktionen, der Mittelwertsatz für Intervall-Funktionen, Optimalität der Mittelwertsatz-Approximation 46
3.1 Überblick 46
3.2 Differenzierbarkeit von Intervall-Funktionen 47
3.3 Charakterisierung der punktweisen Differenzierbarkeit von Intervall-Funktionen durch die zugehörigen Randfunktionen 51
3.4 Rechenregeln für differenzierbare Intervall-Funktionen 59
3.5 Der Mittelwertsatz für Intervall-Funktionen, Optimalität der Mittelwertsatz-Einschließung 65

§ 4 Andere Formen der Mittelwertsatz-Approximationen für Intervall-Funktionen 7o
4.1 Überblick 7o
4.2 Mittelwertsatz und Intervallzerlegung 72
4.3 Mittelwertsatz-Approximation und Pseudoaddition 77

4.4 Mittelwertsatz und Pseudoaddition bei Stetigkeit der Ableitung 84
4.5 Vergleich der verschiedenen Mittelwertsatz-Approximationen 86

§ 5 Höhere Ableitungen für Intervall-Funktionen, Satz von Taylor, Optimalität der Taylor-Einschließungen 89
5.1 Überblick 89
5.2 Höhere Ableitungen für Intervall-Funktionen 9o
5.3 Rechenregeln für höhere Ableitungen 94
5.4 Der Satz von Taylor für Intervall-Funktionen 98
5.5 Optimalität der Taylor-Approximationen 1o2

§ 6 Minimalitätsbetrachtungen für die gewöhnlichen Taylor-Approximationen 1o5
6.1 Überblick 1o5
6.2 Kriterien für die Vergleichbarkeit von Taylor-Approximationen 1o7
6.3 Ein Algorithmus zur Angabe eines minimalen Elementes 115

§ 7 Taylor-Approximationen und Pseudoaddition 122
7.1 Überblick 122
7.2 Konstruktion der Klassen $\tilde{C}^n$ und $\tilde{D}^n_{K^n}$ 123
7.3 Taylor-Approximation und Pseudoaddition 127
7.4 Optimalität der Approximationsoperatoren $T^{n,j}_{K^j_F}$ 133

§ 8 Ein Algorithmus zur Angabe eines minimalen Elementes der geordneten Menge $\langle \{T^{n,1}_{K^1_F}F,..,T^{n,n}_{K^n_F}F\}, \leq \rangle$ für $F \in \tilde{C}^n$ 136
8.1 Überblick 136
8.2 Kriterien für die Vergleichbarkeit von Approximationen der Form $T^{n,j}_{K^j_F}F$ für $F \in \tilde{C}^n$ 137
8.3 Ein Algorithmus zur Angabe eines minimalen Elementes der geordneten Menge $\langle \{T^{n,1}_{K^1_F}F,..,T^{n,n}_{K^n_F}F\}, \leq \rangle$ für $F \in \tilde{C}^n$ 147

§ 9 Verbesserungen der Taylor- Approximationen mittels Intervallzerlegung 152
9.1 Überblick 152
9.2 Konstruktion der Klassen $\tilde{C}^{n,k}$ und einige ihrer Eigenschaften 154

9.3 Taylor-Approximationen und Intervallzerlegung 160
9.4 Optimalität der Approximationen $R^{n,j}$ und $R^{n,j}_{K^i}$ 166
9.5 Vergleichbarkeit der $R^{n,k}$ bzw. $R^{n,s}_{K^s}$ mit den schon bekannten Approximationen gleicher Ordnung 170
9.6 Andere Formen der Taylor-Approximation bei Intervallzerlegung 173

§ 10 Minimalitätsbetrachtungen für die Einschließungsoperatoren der Form $R^{n,j}_{K^i_F}F$, $F \in \tilde{C}^n$ und $j \in M^n_F$ 183
10.1 Überblick 183
10.2 Ein Vergleich zwischen den $R^{n,j}F$ verschiedener Ordnung 185
10.3 Ein Algorithmus zur Angabe eines minimalen Elementes der geordneten Menge $\langle \{R^{n,k}F / k \in M^n_F\}, \leq \rangle$ für $F \in \tilde{C}^n$ 194
10.4 Ein Vergleich zwischen den $T^{n,k}F$ und $R^{n,j}F$ für $F \in \tilde{C}^n$ 200
10.5 Ein Vergleich zwischen den $T^{n,k}_{K^k_F}F$ und $R^{n,j}_{K^j_F}F$ für $F \in \tilde{C}^n$, $k \in \{1,..,n\}$ und $j \in M^n_F$ 206
10.6 Ein Vergleich zwischen den $R^{n,k}_{K^k_F}F$ und $R^{n,j}_{K^j_F}F$ für $F \in \tilde{C}^n$ mit $M^n_F \neq \emptyset$ und $k,j \in M^n_F$ 217
10.7 Ein Algorithmus zum Auffinden eines minimalen Elementes von $\langle \{T^{n,k}_{K^k_F}F / k \in \{1,..,n\}\} \cup \{R^{n,j}_{K^j_F}F / j \in M^n_F\}, \leq \rangle$ für I-Funktionen $F \in \tilde{C}^n$ mit $M^n_F \neq \emptyset \neq K^n_F$ 224

Literaturverzeichnis 230

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41536528_0001

Einleitung

Zu den Hauptanliegen der Intervallarithmetik zählt es, verschiedene Klassen von Fehlern, die bei numerischen Rechnungen und beim Einsatz von Rechenanlagen auftreten, durch sichere Schranken einzuschließen, vgl. Hansen [5], Krückeberg [7], Moore [13], Nickel [15]. Hierbei spielt auch die einschließende Approximation von explizit oder implizit gegebenen Funktionen eine wichtige Rolle. Das heißt: Ist $f:M\to\mathbb{R}$ oder $F:M\to\mathbb{I}$ gegeben (dabei ist $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{I}$ die Menge der reellen, kompakten Intervalle und M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$), dann ist eine Funktion $G:M\to\mathbb{I}$ aus einer vorgegebenen Klasse von Intervall-Funktionen (z.B. den rationalen) gesucht, so daß die Einschließungsbedingung

$$f(x)\in G(x) \quad \text{für alle } x\in M$$

bzw.

$$F(x)\subset G(x) \quad \text{für alle } x\in M$$

erfüllt ist. Da G(x) für jedes $x\in M$ ein Intervall ist, so hat man mit der Berechnung von G(x) in der Intervallbreite von G(x) gleichzeitig ein Maß für den maximalen Fehler gefunden, der bei der Approximation von f bzw. F durch G an der Stelle x entsteht. Das heißt: Die Approximation $H:M\to\mathbb{I}$ für f bzw.F kann als schlechter angesehen werden als die Approximation G, wenn z.B. $G(x)\subset H(x)$ erfüllt ist für alle $x\in M$. Auf diese Weise können Aussagen über die Qualität einer Approximation mit rein ordnungstheoretischen Hilfsmitteln gemacht werden. Natürlich kann die Qualität einer Approximation auch mit funktionalanalytischen Hilfsmitteln (Norm, Metrik) beschrieben werden. Es zeigt sich jedoch, daß die Qualitätsbegriffe, die einerseits mit ordnungstheoretischen Hilfsmitteln und andererseits mit funktionalanalytischen Hilfsmitteln definiert werden, i.a. unverträglich sind, vgl. Ratschek [22]. Es ist daher sinnvoll, einer dieser beiden Möglichkeiten, einen geeigneten Optimalitätsbegriff zu definieren, den Vorzug zu geben. Für intervallarithmetische Belange ist es nicht zweckmäßig, auf durch die Inklusion induzierte Optimalitätsbegriffe zu verzichten. Daher untersucht diese Arbeit Optimalitäts- und Eindeutigkeitsaussagen von intervallanalytischen Approximationen nicht mit funktionalanalytischen, sondern nur mit ordnungstheoretischen Hilfsmitteln. Eine Rechtfertigung für diese Vorgehensweise findet man bei Ratschek [22].

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den Konsequenzen einer derartigen Vorgehensweise. Insbesondere werden den Überlegungen zwei ver-

schiedene Approximationsbegriffe zugrunde gelegt. Der erste wird erhalten, wenn man den Approximationsbegriff für lineare Räume sinngemäß auf Räume von Intervall-Funktionen überträgt, vgl. §1.2 und §1.3. Der zweite entstammt einer Idee von Ratschek, vgl. [21], und berücksichtigt, daß eine Approximation, die numerisch direkt realisierbar ist, gewisse algorithmische Züge aufweist und nur von endlich vieler Information abhängt. Da der erstgenannte Approximationsbegriff für intervallarithmetische Belange kaum verwertbar ist, vgl. §1.4, beschäftigt sich die vorliegende Arbeit hauptsächlich mit dem zweitgenannten und studiert dessen Eigenschaften. Hierdurch ist es wiederum möglich, wichtige Klassen von intervallarithmetischen Approximationen, wie Mittelwert-Approximationen, Taylor-Approximationen, usw., zu beschreiben und diesbezügliche Aussagen von Ratschek aus [22] wesentlich zu vertiefen und zu verallgemeinern. Das Studium dieser erwähnten konkreten intervallarithmetischen Approximationen ist insofern technisch sehr kompliziert, als zu ihrer Beschreibung intervallarithmetische Ableitungsbegriffe heranzuziehen sind, und derartige Ableitungsbegriffe verschiedene Probleme nach sich ziehen, vgl. Ratschek-Schröder [24] und Markov [11].

Als interessantes Nebenprodukt der Untersuchungen ergeben sich einige Zusammenhänge mit der von Kulisch in [8] entwickelten Theorie der monotonen Rundungen, vgl. §1.3. Hierauf kann nur oberflächlich eingegangen werden, um den Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht zu sprengen.

Im folgenden soll ein kurzer Überblick über die vorliegende Arbeit gegeben werden. Den einzelnen Paragraphen ist nochmals eine ausführlichere Übersicht vorangestellt.

In § 1 werden zunächst die aus der Intervall-Mathematik benötigten Hilfsmittel bereitgestellt. Die Menge $\mathbb{I}$ der reellen, kompakten Intervalle bildet keinen linearen Raum, sie erfüllt lediglich die schwächeren Axiome eines quasilinearen Raumes (zur Definition vgl. § 1.2). Nicht jede Norm für den quasilinearen Raum $\mathbb{I}$ (die Definition ist die gleiche wie für lineare Räume) ist nun allerdings geeignet, eine Analysis für Intervall-Funktionen $F:M \to \mathbb{I}$, $M \subset \mathbb{R}$ bzw. $M \subset \mathbb{I}$, zu entwickeln, da sie in Verbindung mit der gewöhnlichen Intervall-Subtraktion keine Metrik induziert. Diese Schwierigkeit ist behebbar, falls man statt der Intervall-Subtraktion eine geeignete Hilfssubtraktion (z.B. die Markov-Differenz, vgl. § 1.3) benutzt und eine zusätzliche Verträglichkeit besteht (vgl. Satz 1.3.2).

Unter Verwendung der Markov-Differenz werden in § 1 mittels einer geeigneten Norm die intervallanalytischen Grundbegriffe erklärt.

In § 2 werden die beiden eingangs erwähnten Approximationsbegriffe definiert und Aussagen über die Existenz bzw. Eindeutigkeit von optimalen Approximationen gemacht. Anschließend werden einige ordnungstheoretische Charakterisierungen für optimale Approximationen hergeleitet sowie Aussagen über die Vergleichbarkeit der beiden Approximationsbegriffe. Beispiele zeigen, daß der erstgenannte Approximationsbegriff für intervallanalytische Belange zu speziell ist. Der zweitgenannte ist für praktische Anwendungen vorzuziehen.

Für den in § 1 betrachteten quasilinearen, normierten Raum wird in § 3 für Intervall-Funktionen $F:M \to \mathbb{I}$, $M \subset \mathbb{R}$, eine Ableitungsversion von Markov [4] übernommen, die sich gut für die Konstruktion verschiedener einschließender Approximationen eignet. In § 3.2 werden zunächst die Ergebnisse von Markov kurz wiedergegeben. Anschließend werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Randfunktionen einer Intervall-Funktion F (zur Definition von Randfunktionen vgl. § 1.3) dafür hergeleitet, daß F differenzierbar ist (im Sinne von Markov). Des weiteren werden einige Rechenregeln für differenzierbare Intervall-Funktionen abgeleitet. Für die Klasse $C^1(M,\mathbb{I})$, $M \in \mathbb{I}$, der stetig differenzierbaren Intervall-Funktionen $F:M \to \mathbb{I}$ wird sodann der Mittelwertsatz bewiesen, und es wird gezeigt, daß die Mittelwertsatz-Einschließung beste Approximation ist für die Klasse $C^1(M,\mathbb{I})$ im Sinne von § 1.4.

Die Mittelwertsatz-Approximation ist zwar optimal, sie liefert aber nicht immer zufriedenstellende Ergebnisse (vgl. die Beispiele in [2] bzw. in § 3.5). In § 4 wird daher das Approximationsproblem für Teilklassen von $C^1(M,\mathbb{I})$ neu gestellt und gelöst. Das führt auf andere Formen der Mittelwertsatz-Approximation für Intervall-Funktionen. Zum Abschluß von § 4 werden die verschiedenen Formen der Mittelwertsatz-Approximation bzgl. der von der Inklusion induzierten Ordnung verglichen.

Thema von § 5 sind höhere Ableitungen von Intervall-Funktionen und der Satz von Taylor. Zunächst werden für im Sinne von § 3 differenzierbare Intervall-Funktionen höhere Ableitungen definiert und einige Aussagen über sie abgeleitet. Anschließend wird der Satz von Taylor für Intervall-Funktionen bewiesen, und es wird gezeigt, daß die Taylor-Einschließung beste Approximation ist für die Klasse $C^n(M,\mathbb{I})$ der n-mal stetig diffe-

renzierbaren Intervall-Funktionen $F:M \to \mathbb{I}$.

Der Satz von Taylor liefert für jedes $F \in C^n(M,\mathbb{I})$ neben der Taylor-Approximation n-ter Ordnung T^nF noch die Approximationen $T^{n,k}F$ für $k = 1,\ldots,n$; dabei ist $T^{n,k} = T^k | C^n(M,\mathbb{I})$. Jede Approximation $T^{n,k}$ ist optimal für C^n für $k = 1,\ldots,n$. Es stellt sich somit die Frage, wie sich für gegebenes $F \in C^n(M,\mathbb{I})$ die Einschließungsgüte von $T^{n,k}F$ ändert, wenn man den Index $k \in \{1,\ldots,n\}$ ändert. Dies ist Thema von § 6. Es wird ein Algorithmus konstruiert, der für jedes $F \in C^n(M,\mathbb{I})$ entscheidet, welche unter den Einschließungen der Form $T^{n,k}F$, $k \in \{1,\ldots,n\}$, die für F bzgl. der von der Inklusion induzierten Ordnung bestmögliche ist.

In § 7 werden für die Teilklassen $\tilde{C}^n$ von C^n (zur Definition von $\tilde{C}^n$ vgl. § 7.2) Approximationen konstruiert, welche die Ergebnisse aus § 5 verbessern. Dies wird dadurch erreicht, daß man statt der gewöhnlichen Intervall-Addition möglichst die Pseudoaddition $\dot{+}$ verwendet (zur Definition von $\dot{+}$ vgl. § 1.2). In § 7 wird zunächst $\tilde{C}^n$ in die (disjunkten) Teilklassen $\tilde{D}^n_{K^n}$ (vgl. § 7.2) zerlegt, wobei K^n die Potenzmenge von $\{1,\ldots,n-1\}$ durchläuft. Für diese Teilklassen $\tilde{D}^n_{K^n}$ werden dann einschließende Approximationen $T^n_{K^n}$ konstruiert, welche die Taylor-Einschließungen aus § 5 z.T. wesentlich verbessern. Die $T^n_{K^n}$ werden anschließend auf Optimalität untersucht und mit den Taylor-Approximationen T^n aus § 5 verglichen (bzgl. der von der Inklusion induzierten Ordnung).

Die Überlegungen aus § 7 liefern für gegebenes $F \in \tilde{C}^n$ neben der Approximation n-ter Ordnung $T^n_{K^n}F$ zusätzlich die Einschließungen $T^{n,k}_{K^n}F$ für $k = 2,\ldots,n$, wobei $T^{n,k}_{K^k} = T^k_{K^k} | \tilde{D}^n_{K^k}$ ist. Ähnlich wie in § 6 stellt sich damit die Frage, wie sich die Approximationsgüte von $T^{n,k}_{K^k}F$ ändert, wenn man den Index $k \in \{2,\ldots,n\}$ ändert. Dies ist Thema von § 8. Es wird ein Algorithmus konstruiert, der für gegebenes $F \in \tilde{C}^n$ stets die bestmögliche unter allen Approximationen der Form $T^{n,k}_{K^k}F$, $k \in \{2,\ldots,n\}$, liefert.

In § 4.2 wird für eine noch recht allgemeine Teilklasse von $\tilde{C}^1$ eine spezielle Form der Mittelwertsatz-Approximation mittels Intervallzerlegung konstruiert. Diese Überlegungen aus § 4.2 können auf $\tilde{C}^n$ mit $n > 1$ ausgedehnt werden. Dies führt zur Definition der (i.a. nicht mehr disjunkten) Teilklassen $\tilde{C}^{n,k}$ von $\tilde{C}^n$, $k = 1,\ldots,n$. Für die Klassen $\tilde{C}^{n,k}$ werden in § 9 Approximationen $R^{n,k}$ konstruiert und auf Optimalität untersucht. Eine Kombination dieser Aussagen mit denen aus § 7 führt zu Approximationen $R^{n,k}_{K^k}$ für geeignete Teilklassen von $\tilde{C}^{n,k}$. Diese $R^{n,k}_{K^k}$ verbessern sowohl die

durch die $R^{n,k}$, als auch die durch die $T_{K^k}^{n,k}$ vermittelten Einschließungsergebnisse (vgl. § 9.5).

Für $F \in \tilde{C}^n$ gibt es i.a. mehrere Indices $k \in \{1,\ldots,n\}$ mit $F \in \tilde{C}^{n,k}$. In § 10 wird zunächst untersucht, für welches dieser k $R^{n,k}F$ bestmögliche Einschließung für F unter allen möglichen Approximationen dieser Form ist. Es folgen analoge Untersuchungen zwischen Approximationen der Form $T^{n,k}F$ und $R^{n,j}F$ bzw. $R_{K^k}^{n,k}F$ und $R_{K^j}^{n,j}F$ bzw. $T_{K^k}^{n,k}F$ und $R_{K^j}^{n,j}F$. In allen Fällen wird ein Algorithmus konstruiert, der angibt, welche von den jeweils betrachteten Approximationen die für F bestmögliche ist.

Die vorliegende Arbeit ist in Paragraphen eingeteilt und jeder Paragraph in Abschnitte. So weist z.B. 'vgl. 9.2' auf §9, Abschnitt 2 und 'vgl. 6.3.1' auf Aussage 1 in 6.3 hin.

Wie üblich bezeichne $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{R}$ die Menge der natürlichen bzw. reellen Zahlen. Für Mengen A,B bedeute $A \subset B$, daß A Teilmenge von B ist; mit $A \setminus B$ werde die Differenzenmenge von A und B bezeichnet. Die leere Menge werde mit $\emptyset$ bezeichnet. Für $M \subset \mathbb{R}$ sei $\mathring{M}$ der offene Kern von M.
Weiter sei 'geordnet' synonym mit 'teilweise geordnet'.

1 Einige Grundlagen aus der Intervall-Mathematik

1.1 Überblick

In § 1 soll ein kurzer Überblick über einige grundlegende Definitionen und Aussagen der Intervall-Mathematik gegeben werden.

In 1.2 werden zunächst die arithmetischen Operationen für die Menge $\mathbb{I}$ der reellen, kompakten Intervalle definiert und einige Aussagen über sie gemacht. Dann wird eine Charakterisierung des additiven Systems von $\mathbb{I}$ mit Hilfe des 'quasilinearen Raums' angegeben. Der Begriff des quasilinearen Raums verallgemeinert den des linearen Raums.

Im quasilinearen Raum $\mathbb{I}$ gelten nicht mehr die von linearen Räumen her bekannten Zusammenhänge zwischen Norm und Metrik (der Begriff Norm ist dabei genauso definiert wie für lineare Räume). Unter Benutzung der gewöhnlichen Intervall-Differenz ist eine Norm auf $\mathbb{I}$ nicht dazu geeignet, Abstände in $\mathbb{I}$ zu messen, denn sie induziert keine Metrik auf $\mathbb{I}$. Benutzt man statt der Intervall-Differenz eine geeignete Hilfsoperation, die entgegen der Intervall-Differenz wieder die Eigenschaften einer Differenz aufweist, so kann man notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angeben, daß eine gegebene Norm auf $\mathbb{I}$ auch eine Metrik induziert. Dies ist Gegenstand von 1.3.

In 1.4 werden unter Verwendung einer geeigneten Norm Konvergenz für Folgen von kompakten Intervallen und Stetigkeit für Intervall-Funktionen $F:M \to \mathbb{I}$, $M \subset \mathbb{I}$, definiert. Die Definitionen sind Verallgemeinerungen der entsprechenden reellen Definitionen. Es werden einige für $\mathbb{R}$ gültige Ergebnisse übertragen auf $\mathbb{I}$.

1.2 Einige intervallarithmetischen Grundlagen

Mit $\mathbb{R}$ werde wie üblich die Menge der reellen Zahlen und mit $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet. Weiter bezeichne $\mathbb{I}$ die Menge der kompakten, reellen Intervalle.
Dann ist jedes $A \in \mathbb{I}$ darstellbar in der Form $A = [a_1, a_2]$ mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ und $a_1 \leq a_2$. Falls in dieser Darstellung $a_1 = a_2$ ist, dann bezeichnet man A auch als Punktintervall und schreibt $A = \underset{\cdot}{a}_1 = \underset{\cdot}{a}_2$.
Für die Menge $\mathbb{I}$ sind die vier Grundoperationen durch
$A * B = \{a * b \;/\; a \in A,\ b \in B\}$, $A, B \in \mathbb{I}$, erklärt (vergl. [13]).
Im Einzelnen gilt mit $A = [a,b]$, $B = [c,d] \in \mathbb{I}$:

$A + B = [a+c, b+d]$

$A - B = [a-d, b-c]$

$A \cdot B = [\min(ac,ad,bc,bd), \max(ac,ad,bc,bd)]$

$A : B = [a,b] \cdot [1/d, 1/c]$ für $0 \notin B$.

Statt $\underset{\cdot}{a} \cdot A$ schreiben wir auch einfach $a\,A$.
Eine Einführung in die Grundlagen der Intervallmathematik findet man z.B. in [1], [3], [13], [15].

Die Subtraktion $-$ ist nicht die Umkehroperation der Addition $+$; dasselbe gilt für die Division und die Multiplikation.
Das additive System $\langle \mathbb{I}, + \rangle$ bildet eine kommutative Halbgruppe mit Kürzungsregel, vergl. [17].
Eine Charakterisierung des multiplikativen Systems findet man in [17].

Durch Verwenden von Intervall-Funktionalen, das sind Abbildungen von $\mathbb{I}$ in $\mathbb{R}$, kann man Fragestellungen aus $\mathbb{I}$ übertragen in einfacher strukturierte Gruppen bzw. Verbände. Für die vorliegende Arbeit wichtig sind die beiden folgenden Funktionale $\lambda, \varphi : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, die für $A = [a_1, a_2] \in \mathbb{I}$ definiert sind durch $\lambda A = a_2 - a_1$ (Länge des Intervalls) und durch $\varphi A = (a_1 + a_2)/2$ (Mittelpunkt des Intervalls).
Dann gilt (vergl. [19])

Satz 1.2.1

(1) Das Funktional λ ist ein Homomorphismus von $\langle \mathbb{I}, + \rangle$ in die Gruppe $\langle \mathbb{R}, + \rangle$.

(2) Das Funktional φ ist ein Epimorphismus von $\langle \mathbb{I}, + \rangle$ auf die Gruppe $\langle \mathbb{R}, + \rangle$.

(3) Für jedes Intervall $A \in \mathbb{I}$ gilt die Darstellung

$$A = \varphi A + [-1,1]\, \lambda A/2.$$

Zwei Intervalle sind genau dann gleich, wenn ihre φ-Werte und ihre λ-Werte gleich sind. Es gilt

$$A + B = (\varphi A + \varphi B) + [-1,1]\,(\lambda A + \lambda B)/2.$$

Für diese Arbeit wichtig ist die sogenannte Hukuhara-Differenz, die man auch als Umkehroperation der Addition + in $\mathbb{I}$ auffassen kann, vergl. [16]. Die Hukuhara-Differenz ist definiert durch: $X = A \overset{h}{-} B$, wenn $A = X + B$, $A,B,X \in \mathbb{I}$.
Insbesondere folgt also aus dieser Definition $A \overset{h}{-} A = 0$.
Die Gleichung $A + X = B$ ist genau dann lösbar, wenn $\lambda A \leq \lambda B$ ist. In diesem Fall erhält man als eindeutig bestimmte Lösung $X = B \overset{h}{-} A \in \mathbb{I}$.
Die Hukuhara-Differenz ist also eine partielle Operation auf $\mathbb{I}$, denn $A \overset{h}{-} B$ ist nur dann erklärt, wenn $\lambda B \leq \lambda A$ gilt.

Neben der Hukuhara-Differenz wird auch die Pseudoaddition $\dot{+}$ noch häufig benutzt werden. Dabei handelt es sich um eine partielle, binäre Operation auf $\mathbb{I}$, die man als Umkehroperation der Intervall-Subtraktion auffassen kann und die wie folgt definiert ist (vergl.[21]): Für $A,B \in \mathbb{I}$ mit $\lambda B \leq \lambda A$ sei $X = A \dot{+} B$ die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $-B + X = A$. (Für $\lambda B > \lambda A$ existieren keine Lösungen.) Dann gilt insbesondere $-A \dot{+} A = 0$.

Man weist nun leicht nach, daß zwischen den Funktionalen φ und λ und den Hilfsoperationen $\overset{h}{-}$ und $\dot{+}$ die folgenden Beziehungen gelten:
Für alle $A,B \in \mathbb{I}$ mit $\lambda B \leq \lambda A$ ist

$$\varphi(A \dot{+} B) = \varphi A + \varphi B\,, \quad \varphi(A \overset{h}{-} B) = \varphi A - \varphi B\,,$$

$$\lambda(A \dot{+} B) = \lambda A - \lambda B\,, \quad \lambda(A \overset{h}{-} B) = \lambda A - \lambda B\,.$$

Man kann die Definition für $\dot{+}$ wie folgt verallgemeinern (vergl.[10]):
Für $A,B \in \mathbb{I}$ sei

$$A \oplus B = \begin{cases} A \dot{+} B, \text{ falls } \lambda B \leq \lambda A \\ B \dot{+} A \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $A \oplus B = B \oplus A$, d.h. die Operation $\oplus$ ist kommutativ. Sie ist allerdings nicht mehr assoziativ (vergl.[10]).
Die Operation $\oplus$ wird noch benötigt für Differenzierbarkeitsregeln von Intervall-Funktionen, vergl. § 3 und § 5.

Man kann das additive System der Intervallarithmetik bezüglich der skalaren Multiplikation $x[a,b] = x \cdot [a,b]$, $x \in \mathbb{R}$, mit Hilfe des quasilinearen Raums beschreiben, vergl. [12].

Sei $\langle Q,+\rangle$ eine kommutative Halbgruppe mit neutralem Element Θ. Es existiere eine skalare Multiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times Q \to Q$, so daß für alle $x,y \in \mathbb{R}$ und für alle $A,B \in Q$ gilt:

(Q1) $x\,(A + B) = x\,A + x\,B$,

(Q2) $(x + y)\,A = x\,A + y\,A$, wenn $x\,y \geq o$ ist,

(Q3) $x\,(y\,A) = (x\,y)\,A$,

(Q4) $1\,A = A$,

(Q5) $o\,A = \Theta$.

Dann heißt $\langle Q,+,\cdot\rangle$ ein quasilinearer Raum (über $\mathbb{R}$).

Bemerkung 1.2.2 (vgl. [20])
$\langle Q,+,\cdot\rangle$ wird zu einem linearen Raum, wenn man die Gültigkeit von (Q2) für alle $x,y \in \mathbb{R}$ fordert, d.h. der quasilineare Raum ist eine Verallgemeinerung des linearen Raums. Einzelheiten über quasilineare Räume findet man in [23].

Wir stellen nun fest, daß $\langle \mathbb{I},+,\cdot\rangle$ ein quasilinearer Raum über $\mathbb{R}$ ist, wenn man die skalare Multiplikation durch $\underset{\cdot}{x} \cdot A = x\,A$, $x \in \mathbb{R}$, definiert.

Sei $\langle Q,+,\cdot\rangle$ ein quasilinearer Raum (über $\mathbb{R}$). Dann heißt $M \subset Q$ ein quasilinearer Unterraum von Q, falls M gegenüber den Operationen $+$ und $\cdot$ abgeschlossen ist und selbst einen quasilinearen Raum bzgl. dieser Operationen bildet. Es gilt also:
M ist genau dann quasilinearer Unterraum von Q, wenn

1) $\langle M,+\rangle$ Unterhalbgruppe von $\langle Q,+\rangle$,

2) $\Theta \in M$ und

3) für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $A \in M$ $x \cdot A \in M$ ist.

Sei z.B. $\langle \mathbb{I},+,\cdot\rangle$ vorgegeben. Weiter sei $\underset{\cdot}{\mathbb{R}}$ die Menge aller Punktintervalle. Dann ist $\underset{\cdot}{\mathbb{R}} \subset \mathbb{I}$, und es gilt $\Theta = \underset{\cdot}{0} \in \underset{\cdot}{\mathbb{R}}$. Man bestätigt nun leicht, daß dann $\langle \underset{\cdot}{\mathbb{R}},+,\cdot\rangle$ ein quasilinearer Unterraum von $\langle \mathbb{I},+,\cdot\rangle$ ist.

Die Abbildung $\alpha : \mathbb{R} \to \underset{\cdot}{\mathbb{R}}$ mit $x \longrightarrow \underset{\cdot}{x}$ ist ein Isomorphismus zwischen den linearen Räumen $\langle \mathbb{R},+,\cdot\rangle$ und $\langle \underset{\cdot}{\mathbb{R}},+,\cdot\rangle$, wie man leicht bestätigt. Also kann man die beiden Strukturen identifizieren und $\langle \mathbb{R},+,\cdot\rangle$ als quasilinearen Unterraum von $\langle \mathbb{I},+,\cdot\rangle$ auffassen.

Bemerkung 1.2.3
Es wurde bereits erwähnt, daß die Intervalldivision keine Umkehroperation der Intervallmultiplikation ist. In [10] hat Markov für Intervalle $A,B \in \mathbb{I}$

mit $o \notin B$ eine Hilfsdivision / mit $A/B \in \mathbb{I}$ definiert, die $C/C = 1$ erfüllt für alle $C \in \mathbb{I}$ mit $o \notin C$. Man kann also / als Umkehroperation der Intervallmultiplikation auffassen. Ähnlich wie für die Operation $\frac{1}{}$ lassen sich auch hier noch einige der von den reellen Zahlen her bekannten Rechenregeln ableiten. So gilt z.B. $A \cdot B/A = B$ für $A,B \in \mathbb{I}$ mit $o \notin A$, usw.. Da diese Hilfsdivision für das Folgende nicht benötigt wird, so soll auf weitere Ausführungen verzichtet werden.

Bemerkung 1.2.4

Für $M \subset \mathbb{R}$ sei $\mathbb{I}\mathbb{F}(M,\mathbb{I})$ die Klasse der Intervall-Funktionen (kurz: I-Funktionen) $F:M \to \mathbb{I}$ und $\mathbb{F}(M,\mathbb{R})$ die Klasse der reellen Abbildungen $f:M \to \mathbb{R}$. $\mathbb{I}\mathbb{F}(M,\mathbb{I})$ ist ein quasilinearer Raum über $\mathbb{R}$ bzgl. der punktweise definierten Addition und skalaren Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{R}$.
Durch die Zuordnung $f \mapsto F = [f,f] = \underset{\cdot}{f}$ wird ein Isomorphismus zwischen den linearen Räumen $\mathbb{F}(M,\mathbb{R})$ und $\mathbb{I}_{\cdot}\mathbb{F}(M,\mathbb{I})$ definiert, wobei $\mathbb{I}_{\cdot}\mathbb{F}(M,\mathbb{I})$ der quasilineare Teilraum von $\mathbb{I}\mathbb{F}(M,\mathbb{I})$ ist, dessen Elemente von der Form $F = [f,f] = \underset{\cdot}{f}$, $f \in \mathbb{F}(M,\mathbb{R})$, sind.
Man kann daher die Klassen $\mathbb{F}(M,\mathbb{R})$ und $\mathbb{I}_{\cdot}\mathbb{F}(M,\mathbb{I})$ identifizieren und demgemäß $\mathbb{F}(M,\mathbb{R})$ als quasilinearen Teilraum von $\mathbb{I}\mathbb{F}(M,\mathbb{I})$ auffassen.

Man bezeichnet ein Intervall $A \in \mathbb{I}$ als symmetrisch, falls $\mathrm{Y}A = o$ ist. Analog heißt eine I-Funktion $F \in \mathbb{I}\mathbb{F}(M,\mathbb{I})$ symmetrisch, falls $\mathrm{Y}F = o$ ist, d.h. wenn für alle $x \in M$ $\mathrm{Y}F(x) = o$ ist.

1.3 Metrik und Norm für den quasilinearen Raum $\langle \mathbb{I}, +, \cdot \rangle$

Man kann die Menge der reellen, kompakten Intervalle in natürlicher Weise zu einem metrischen Raum machen durch die Festsetzung

$d_m(A,B) = \max\{|a_1-b_1|, |a_2-b_2|\}$ für $A = [a_1,a_2]$, $B = [b_1,b_2] \in \mathbb{I}$.

Es gilt (vergl.[26])

Satz 1.3.1

$\langle \mathbb{I}, d_m \rangle$ ist ein vollständiger metrischer Raum.

Unter der Norm eines quasilinearen Raumes $\langle Q,+,\cdot \rangle$ versteht man eine reellwertige Abbildung auf Q, die den üblichen Normeigenschaften genügt (vergl.[20]): Für $A,B \in Q$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

(N1) $\|A\| > 0$ für $A \neq \Theta$,

(N2) $\|x\,A\| = |x|\,\|A\|$,

(N3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Durch $\|A\|_m = \max\{|a|, |b|\}$, $A = [a,b] \in \mathbb{I}$, wird eine Norm auf $\langle \mathbb{I}, +, \cdot \rangle$ definiert.

Zwischen d_m und $\|\cdot\|_m$ besteht nun folgender Zusammenhang: Für jedes $A \in \mathbb{I}$ ist $d_m(A,\Theta) = \|A\|_m$, d.h. die Norm $\|\cdot\|_m$ wird durch die Metrik d_m induziert.

Umgekehrt wird durch $\|A - B\|_m$, $A,B \in \mathbb{I}$, keine Metrik auf $\mathbb{I}$ definiert. Denn für $A \in \mathbb{I}$, A kein Punktintervall, ist $\|A - A\|_m > 0$. Unter Verwendung der Intervallsubtraktion kann man also i.a. aus einer Norm auf $\mathbb{I}$ keine Metrik erhalten. Das liegt daran, daß die Intervallsubtraktion nicht Umkehroperation der Addition ist (vergl.[20]).

In [10] hat Markov folgende Verallgemeinerung der Hukuhara-Differenz gegeben: Für $A,B \in \mathbb{I}$ sei

$$A \ominus B = \begin{cases} A \overset{h}{-} B, & \text{falls } \lambda B \leq \lambda A \\ -(B \overset{h}{-} A) & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Operation $\ominus$ auf $\mathbb{I}$ ist weder kommutativ (es gilt $A \ominus B = -(B \ominus A)$) noch assoziativ, vergl. auch [10]. Offensichtlich ist $A \ominus A = \Theta$ für alle $A \in \mathbb{I}$.

Verwendet man nun statt der Intervalldifferenz - die M(arkov)-Differenz, so gilt für $A,B \in \mathbb{I}$ $\|A \ominus B\|_m = d_m(A,B)$, d.h. unter Verwendung von $\ominus$ ist d_m durch die Norm $\|\cdot\|_m$ definierbar. Es sei noch insbesondere darauf hingewiesen, daß für alle $A,B \in \mathbb{I}$ $\|A \ominus B\|_m \leq \|A\|_m + \|B\|_m$ ist.

Verwendet man die M-Differenz, so gilt allgemein über die Definierbarkeit

einer Metrik auf $\mathbb{I}$ durch eine Norm auf $\mathbb{I}$:

Satz 1.3.2

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\langle \mathbb{I}, +, \cdot \rangle$. Genau dann wird durch $d_{\|\|}(A,B) = \|A \ominus B\|$, $A,B \in \mathbb{I}$, eine Metrik auf $\mathbb{I}$ definiert, wenn für alle $A,B \in \mathbb{I}$ die Verträglichkeit $\|A \ominus B\| \leq \|A\| + \|B\|$ besteht.

Beweis. Sei zunächst $d_{\|\|}$ eine Metrik auf $\mathbb{I}$. Dann gilt für beliebige $A,B \in \mathbb{I}$ wegen der für Metriken gültigen Dreiecksungleichung

$d_{\|\|}(A,B) \leq d_{\|\|}(A,O) + d_{\|\|}(O,B)$. Nach Definition von $d_{\|\|}$ ist dies aber die Behauptung.

Umgekehrt gelte nun $\|A \ominus B\| \leq \|A\| + \|B\|$ für alle $A,B \in \mathbb{I}$. Wegen $A \ominus B = -(B \ominus A)$ folgt dann sofort $d_{\|\|}(A,B) = d_{\|\|}(B,A)$.

Nach Definition ist $A \ominus B = \Theta$ gleichbedeutend mit $A = B$. Also gilt auch $d_{\|\|}(A,B) = o$ genau dann, wenn $A = B$ ist.

Der Nachweis der Dreiecksungleichung bereitet etwas mehr Aufwand.

Seien $A,B,C \in \mathbb{I}$. Es ist $d_{\|\|}(A,B) + d_{\|\|}(B,C) \geq d_{\|\|}(A,C)$ zu zeigen.

Wir setzen zunächst $\lambda C \leq \lambda A$ voraus.

Dann sind die Fälle 1) $\lambda C \leq \lambda B \leq \lambda A$, 2) $\lambda B > \lambda A$, 3) $\lambda C > \lambda B$ zu unterscheiden.

Zu 1):Aus den Eigenschaften einer Norm erhält man zunächst $\|A \ominus B\| + \|B \ominus C\| \geq \|(A \ominus B) + (B \ominus C)\|$. Nun gilt aber unter den Voraussetzungen von 1) $(A \ominus B) + (B \ominus C) = A \ominus C$, und damit folgt die Behauptung.

Zu 2): Es ist $\|A \ominus B\| = \|B \ominus A\|$. Nach Definition von $\ominus$ gilt dann: $X = B \ominus A$ ist Lösung von $X + A = B$, $Y = B \ominus C$ ist Lösung von $Y + C = B$ und $Z = A \ominus C$ ist Lösung von $Z + C = A$.

Daraus erhält man $Y + C = X + Z + C$. In $\langle \mathbb{I}, + \rangle$ gilt die Kürzungsregel, also folgt $Y = X + Z$ und damit $Z = Y \ominus X$. Aus den Voraussetzungen folgt nun weiter $\|Z\| = \|Y \ominus X\| \leq \|X\| + \|Y\|$. Das ist aber die Behauptung.

Zu 3): Diesen Fall beweist man ähnlich wie 2).

Damit ist für $\lambda C \leq \lambda A$ die Behauptung gezeigt. Der Fall $\lambda A < \lambda C$ verläuft analog.

Der quasilineare, normierte Raum $\langle \mathbb{I}, +, \cdot, \ominus, \|\cdot\|_m \rangle$ erweist sich nun als besonders geeignet, einen Kalkül für Intervall-Funktionen $F:M \to \mathbb{I}$, wobei $M \subset \mathbb{I}$ bzw. $M \subset \mathbb{R}$ ist, zu entwickeln. Hierbei findet die M-Differenz häufige Anwendung. Es sollen daher als nächstes einige Hilfsmittel für das Rechnen mit $\ominus$ bereitgestellt werden.

Nach [29] bezeichnet $a \vee b$ für $a,b \in \mathbb{R}$ das Intervall mit den Eckpunkten a und b, d.h. $\vee$ ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{I}$, die definiert ist durch
$\vee : (a,b) \longrightarrow [\min(a,b), \max(a,b)] = a \vee b = v((a,b))$.
Man bezeichnet $\vee$ auch als Sunaga-Operator (kurz S-Operator).
Sei $e: \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $A = [a,b] \longrightarrow (a,b)$ und $E: \mathbb{I}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ mit $(A,B) \longrightarrow (e(A), e(B))$.
Weiter werde mit $m: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die komponentenweise Subtraktion in $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.
Dann kann man die M-Differenz $\ominus$ als Komposition dieser drei Abbildungen darstellen.

Hilfssatz 1.3.3
Die M-Differenz $\ominus$ ist darstellbar als Komposition der Abbildungen $\vee, m$ und E und es gilt $\ominus = \vee \circ m \circ E$. Für $A = [a_1, a_2]$ und $B = [b_1, b_2]$ aus $\mathbb{I}$ gilt also $A \ominus B = (a_1 - b_1) \vee (a_2 - b_2)$.

Weitere Eigenschaften von $\ominus$ sind:
Hilfssatz 1.3.4
Seien $A = [a,b]$ und $B = [c,d] \in \mathbb{I}$ und $x,y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(1) $A \ominus B = -(B \ominus A)$.

(2) $A \ominus B = A \oplus (-B)$, insbesondere ist $A \ominus B = A \dot{+} (-B)$ für $\lambda B \leq \lambda A$.

(3) Der S-Operator $\vee$ ist homogen (d.h. es ist $x \vee ((a,b)) = \vee(x(a,b))$ und daher gilt weiter $x(A \ominus B) = x A \ominus x B$.

(4) Es ist $\lambda(x \vee y) = |x-y|$ und daher weiter $\lambda(A \ominus B) = |\lambda A - \lambda B| = \lambda(A \oplus B)$.

Es gelten folgende Rechenregeln
Hilfssatz 1.3.5 (vgl. [11])
Seien $A,B,C,D \in \mathbb{I}$ und sei $M_1 = (\lambda A - \lambda C)(\lambda B - \lambda D)$, $M_2 = (\lambda A - \lambda B)(\lambda C - \lambda D)$.
Dann gilt

(1) $A \ominus \Theta = A$, (2) $\Theta \ominus A = -A$, (3) $A \ominus A = \Theta$,

(4) $A \ominus (-B) = B \ominus (-A)$, (5) $(A + B) \ominus A = B$, (6) $(A \ominus B) + B = A$, falls $\lambda A \geq \lambda B$ ist.

(7) $(A + B) \ominus (C + D) = \begin{cases} (A \ominus C) + (B \ominus D), & \text{falls } M_1 \geq 0 \\ (A \ominus C) \ominus (B \ominus D), & \text{falls } M_1 < 0 \end{cases}$

$$(8)\quad (A \ominus B) + (C \ominus D) = \begin{cases} (A \ominus (-C)) \ominus (B \ominus (-D)), & \text{falls } M_2 < o \leq M_1 \\ (A \ominus (-C)) + ((-B) \ominus D), & \text{falls } M_1 < o > M_2 \\ (A + C) \ominus (B + D), & \text{falls } M_2 \geq o \end{cases}$$

$$(9)\quad (A \oslash B) \oslash (C \oslash D) = \begin{cases} (A \oslash C) \oslash (B \oslash D), & \text{falls } M_1 \geq o \leq M_2 \\ (A \oslash C) + (-(B \oslash D)), & \text{falls } M_1 < o \leq M_2 \\ (A + (-C)) \ominus (B + (-D)), & \text{falls } M_2 < o. \end{cases}$$

Beweis. Die Punkte (1) bis (6) folgen unmittelbar, die Beweise zu (7) bis (9) findet man in [11].

Mit $|\cdot|$ werde die euklidische Norm auf $\mathbb{R}$ bezeichnet. Dann wird durch die Zuordnung $x \longrightarrow \dot{x}$, $x \in \mathbb{R}$, eine isometrische Isomorphie zwischen den linearen, normierten Räumen $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, |\cdot| \rangle$ und $\langle \dot{\mathbb{R}}, +, \cdot, \| \ \|_m \rangle$ definiert.

Man kann daher $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, |\cdot| \rangle$ auffassen als Unterraum des quasilinearen, normierten Raums $\langle \mathbb{I}, +, \cdot, \| \cdot \|_m \rangle$.

1.4 Konvergenz und Stetigkeit im quasilinearen, normierten Raum $\langle \mathbb{I}, +, \cdot, \ominus, \|\cdot\|_m \rangle$

Konvergenz und Stetigkeit für den quasilinearen Raum $\langle \mathbb{I}, +, \cdot, \ominus, \|\cdot\|_m \rangle$ kann man nun formal genauso wie in normierten Räumen definieren.

Definition 1.4.1

Die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n \in \mathbb{I}$, konvergiert gegen $A_o \in \mathbb{I}$, man schreibt dann auch $A_n \longrightarrow A_o$ oder $\lim_{n\to\infty} A_n = A_o$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_o \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_o$ $\|A_n \ominus A_o\|_m < \varepsilon$ gilt.

Bemerkung 1.4.2

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{I}$ mit $A_n = [a_n, b_n]$. Dann konvergiert $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen $A_o = [a_o, b_o] \in \mathbb{I}$, wenn die (reellen) Folgen der Randpunkte $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a_o bzw. b_o konvergieren. Insbesondere ist also der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt, falls er existiert.

Für Folgen von Punktintervallen fällt 1.4.1 mit der Definition der Konvergenz für reelle Zahlenfolgen zusammen.

Es lassen sich nun viele der in normierten Räumen gültigen Aussagen übertragen, so gilt z.B.

Satz 1.4.3

Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen aus $\mathbb{I}$ mit $A_n \longrightarrow A_o$ und $B_n \longrightarrow B_o$, A_o und $B_o \in \mathbb{I}$. Weiter sei $x \in \mathbb{R}$. Dann folgt:

Die Folge $(A_n * B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $* \in \{+, -, \ominus, \oplus\}$ ist, konvergiert, und ihr Grenzwert ist gleich $A_o * B_o$.

Weiterhin konvergiert $(x \cdot A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und es ist $\lim_{n\to\infty} x \cdot A_n = x \cdot A_o$.

Beweis. Der Beweis folgt entweder über die Randpunkte der Folgen oder mit Hilfe der Stetigkeit des S-Operators, welche in 1.4.9 bewiesen wird.

Eine Teilmenge M von $\mathbb{I}$ heißt beschränkt, falls ein $t \in \mathbb{R}^{>0}$ existiert, so daß für alle $A \in M$ $\|A\| \leq t$ gilt. Als Analogon zur Aussage, daß jede beschränkte, monotone Folge reeller Zahlen konvergiert, erhält man

Satz 1.4.4

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{I}$ mit $A_n = [a_n, b_n]$ für $n = 1, 2, \ldots$

(1) Falls $A_n \supset A_{n+1}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, dann existiert $\lim_{n\to\infty} A_n$ und ist gleich $\bigcap_n A_n$.

(2) Sei $A_n \subset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls dann die Menge der Folgenglieder beschränkt ist, dann existiert $\lim_{n\to\infty} A_n$ und ist gleich $\left[\inf_n a_n, \sup_n b_n\right]$.

Bemerkung 1.4.5

In [10] hat Markov eine partielle Operation / auf $\mathbb{I}$ definiert, die man als Umkehroperation der Intervallmultiplikation auffassen kann, vgl. 1.2.3. Für diese Hilfsdivision gilt unter den Voraussetzungen von 2.3.3 mit der Forderung $o \notin B_o$: Es existiert $\lim_{n\to\infty} (A_n/B_n)$ und ist gleich A_o/B_o.

Nach diesem kurzen Überblick über Konvergenz in $\langle \mathbb{I}, +, \cdot, \ominus, \|\cdot\|_m \rangle$ soll nun als nächstes Stetigkeit für Intervall-Funktionen (kurz I-Funktionen) definiert werden.
Unter einer I-Funktion F versteht man eine Abbildung $F: M \to \mathbb{I}$, wobei M eine Teilmenge von $\mathbb{I}$ ist.

Definition 1.4.6

Die I-Funktion $F: M \to \mathbb{I}$ ist stetig in $X_o \in M$, falls für jedes $\varepsilon > o$ ein $\delta > o$ existiert, so daß für alle $X \in M$ mit $\|X \ominus X_o\|_m < \delta$

$$\|F(X) \ominus F(X_o)\|_m < \varepsilon \text{ ist.}$$

F heißt stetig in M, falls F für alle $X \in M$ stetig ist.

Genauso wie für reelle Abbildungen beweist man den

Satz 1.4.7

Die I-Funktion $F: M \to \mathbb{I}$ ist stetig in $X_o \in M$ genau dann, wenn für jede Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus M mit $\lim_{n\to\infty} X_n = X_o$ auch $\lim_{n\to\infty} F(X_n) = F(X_o)$ folgt.

Bemerkung 1.4.8

Für Abbildungen $f: M \to \mathbb{R}$ mit $M \subset \mathbb{R}$ fällt 1.4.6 zusammen mit der Definition der Stetigkeit für reelle Funktionen, d.h. Definition 1.4.6 ist eine Verallgemeinerung des reellen Falls.

Als nächstes soll die Stetigkeit des S-Operators ν nachgewiesen werden, die noch häufig benötigt wird.

Für $n \in \mathbb{N}$ und $n > 1$ sei die Menge $\mathbb{I}^n$ vorgegeben. Man kann dann die Operationen der Addition, skalaren Multiplikation und M-Differenz für $\mathbb{I}$ auf $\mathbb{I}^n$ übertragen durch komponentenweise Definition. Unter Beibehaltung der Bezeichnungen für $\mathbb{I}$ ist dann wieder $\langle \mathbb{I}^n, +, \cdot \rangle$ ein quasilinearer Raum.
Für $(A_1, .., A_n) \in \mathbb{I}^n$ sei weiter $\|(A_1, .., A_n)\|_{m,n} = \max\left\{\|A_i\|_m / i = 1, .., n\right\}$.
(Für $n = 1$ ist $\|A_1\|_{m,1} = \|A_1\|_m$.)

Dann ist $\|\cdot\|_{m,n}$ eine Norm auf $\langle \mathbb{I}^n,+,\cdot,\ominus\rangle$. Insbesondere gilt für alle $A,B\in\mathbb{I}^n$ $\|A\ominus B\|_{m,n} \leq \|A\|_{m,n} + \|B\|_{m,n}$, und daher induziert $\|\cdot\|_{m,n}$ auch eine Metrik auf $\mathbb{I}^n$ (vergl. 1.3.2).

Sei nun zugrunde gelegt der quasilineare, normierte Raum $\langle \mathbb{I}^n,+,\cdot,\|\cdot\|_{m,n}\rangle$. Dann wird durch die Zuordnung $(x_1,..,x_n) \to (\dot{x}_1,..,\dot{x}_n)$ eine isometrische Isomorphie zwischen den linearen, normierten Räumen $\langle \mathbb{R}^n,+,\cdot,|\cdot|\rangle$ und $\langle \mathbb{R}^n_{\cdot},+,\cdot,\|\cdot\|_{m,n}\rangle$ definiert, wobei $|(x_1,..,x_n)| = \max\{|x_i| / i = 1,..,n\}$ ist.

Da nun $\langle \mathbb{R}^n_{\cdot},+,\cdot,\|\ \|_{m,n}\rangle$ ein Teilraum des quasilinearen, normierten Raums $\langle \mathbb{I}^n,+,\cdot,\|\ \|_{m,n}\rangle$ ist, so kann man wie für n = 1 $\langle \mathbb{R}^n,+,\cdot,|\cdot|\rangle$ wieder als Teilraum von $\langle \mathbb{I}^n,+,\cdot,\|\cdot\|_{m,n}\rangle$ auffassen.

Man kann den S-Operator $v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{I}$ auf ganz $\mathbb{I}^2$ erweitern (vgl. [11]):
Sei V: $\mathbb{I}\times\mathbb{I}\to\mathbb{I}$ mit $(A,B)\to[\min(a_1,b_1),\max(a_2,b_2)]$, wobei $A = [a_1,a_2]$ und $B = [b_1,b_2]\in\mathbb{I}$ sind.
Offensichtlich gilt dann $V|\mathbb{R}^2 = v$.

Satz 1.4.9

Der S-Operator V ist eine stetige Abbildung von $\langle \mathbb{I}^2,+,\cdot,\|\cdot\|_{m,2}\rangle$ in $\langle \mathbb{I},+,\cdot,\|\cdot\|_m\rangle$.

Beweis. Sei $(A_o,B_o)\in\mathbb{I}^2$ fest, und sei $(A_n,B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{I}^2$ mit $(A_n,B_n)\to(A_o,B_o)$. Es ist zu zeigen, daß dann gilt: $(A_n V B_n)\to(A_o V B_o)$. Nun gilt aber nach Definition mit $A_n = [a_n,b_n]$ und $B_n = [c_n,d_n]$ für n = o,1,..

$$\|(A_n V B_n)\ominus(A_o V B_o)\|_m = \|[\min(a_n,c_n),\max(b_n,d_n)]\ominus[\min(a_o,c_o),\max(b_o,d_o)]\|_m$$
$$\leq \max\{|\min(a_n,c_n)-\min(a_o,c_o)|\ ,\ |\max(b_n,d_n)-\max(b_o,d_o)|\}.$$

Aus den Voraussetzungen folgt nun insbesondere $A_n\to A_o, B_n\to B_o$ und daraus die Konvergenz der einzelnen Randfolgen. Also wird obiger Ausdruck für hinreichend großes n beliebig klein, d.h. es gilt die Behauptung.

Folgerung 1.4.1o

(1) Die Abbildung $V|\mathbb{R}^2 = v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{I}$ ist stetig.

(2) Sei $A\in\mathbb{I}$ fest. Dann ist die durch $V_A(B) = AVB$ definierte Abbildung $V_A:\mathbb{I}\to\mathbb{I}$ stetig.

(3) Die Operationen $\ominus$ und $\oplus$ sind stetig.

Beweis. (1) und (2) sind klar.

(3) folgt aus 1.3.3 und 1.4.1o wegen der Stetigkeit von v,m und E und wegen der Gültigkeit von $A\oplus B = A\ominus(-B)$ bzw. $A\oplus B = B\ominus(-A)$ für $A,B\in\mathbb{I}$ mit

$\lambda B \in \lambda A$ bzw. mit $\lambda A < \lambda B$.

Der S-Operator $V: \mathbb{I}^2 \longrightarrow \mathbb{I}$ hat die Eigenschaft $AVA = A$, d.h. V ist eine idempotente, zweistellige Operation auf $\mathbb{I}$. Weiter ist V kommutativ und assoziativ, vergl. [11]. Also gilt

Satz 1.4.11
Es ist $\langle \mathbb{I}, V \rangle$ eine kommutative, idempotente Halbgruppe.

Die partielle Abbildung $V_A: \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{I}$, $A \in \mathbb{I}$ fest, hat noch eine andere bemerkenswerte Eigenschaft (zur Definition eines Hüllenoperators vgl. 2.3.26)

Satz 1.4.12
Für jedes feste $A \in \mathbb{I}$ ist V_A ein Hüllenoperator der geordneten Menge $\langle \mathbb{I}, \subset \rangle$, wobei $\subset$ die übliche Mengeninklusion bedeute.

Beweis. Es ist $V_A^2 = V_A$. Denn für jedes $B \in \mathbb{I}$ ist $V_A^2(B) = V_A(AVB) = AV(AVB) = (AVA)VB = AVB = V_A(B)$ wegen der Assoziativität von V.
Nach Definition von V ist für jedes $B \in \mathbb{I}$ $B \subset V_A(B)$.
Für $B, C \in \mathbb{I}$ mit $B \subset C$ gilt weiter $AVB \subset AVC$ nach Definition von V. Also gilt auch $V_A(B) \subset V_A(C)$.
Somit ist V_A ein Hüllenoperator.

Man kann die Hüllenoperatoren der Form $V_A, A \in \mathbb{I}$, von $\langle \mathbb{I}, \subset \rangle$ noch genauer charakterisieren (zur Definition eines Filters vgl. 2.3.18):

Satz 1.4.13
Sei Ψ ein Hüllenoperator von $\langle \mathbb{I}, \subset \rangle$. Genau dann ist $\Psi = V_A$ für ein $A \in \mathbb{I}$, wenn die Menge der Fixpunkte $\mathfrak{f}_\Psi$ von Ψ ein Hauptfilter von $\langle \mathbb{I}, \subset \rangle$ ist.

Beweis. Sei zunächst $\Psi = V_A$ für ein $A \in \mathbb{I}$. Wegen $\Psi(A) = A$ ist dann $A \in \mathfrak{f}_\Psi$. Dann ist für jedes $B \in \mathbb{I}$ mit $A \subset B$ offensichtlich $\Psi(B) = B$ und umgekehrt folgt aus $\Psi(B) = B$ immer $A \subset B$. Also ist $\mathfrak{f}_\Psi = [A)$, d.h. $\mathfrak{f}_\Psi$ ist ein Hauptfilter von $\langle \mathbb{I}, \subset \rangle$.
Umgekehrt sei nun Ψ ein Hüllenoperator von $\langle \mathbb{I}, \subset \rangle$, dessen Fixpunktmenge von der Form $\mathfrak{f}_\Psi = [A)$ ist. Dann muß $\Psi = V_A$ gelten.
Sei $B \in \mathbb{I}$ beliebig. Da V_A Hüllenoperator ist, so folgt $B \subset V_A(B)$. Wegen $A \subset V_A(B)$ folgt dann $V_A(B) \in \mathfrak{f}_\Psi$, da $\mathfrak{f}_\Psi = [A)$ Hauptfilter ist. Da Ψ Hüllenoperator ist, so folgt wegen $B \subset V_A(B)$ also $\Psi(B) \subset \Psi(V_A(B)) = V_A(B)$.
Umgekehrt gilt nun wegen $\Psi^2(B) = \Psi(B)$ $\Psi(B) \subset \mathfrak{f}_\Psi = [A)$. Damit ist

$A \subset \Psi(B)$, also insbesondere $V_A(\Psi(B)) = \Psi(B)$. Wegen $B \subset \Psi(B)$ folgt nun $V_A(B) \subset V_A(\Psi(B)) = \Psi(B)$.
Insgesamt folgt damit $V_A(B) = \Psi(B)$. $B \in \mathbb{I}$ war beliebig. Also gilt die Behauptung.

Man kann jede I-Funktion $F:M \to \mathbb{I}$, $M \subset \mathbb{I}$, beschreiben durch reellwertige Abbildungen.
Sei $F:M \to \mathbb{I}$. Weiter sei $e:\mathbb{I} \to \mathbb{R}^2$ mit $A = [a,b] \to (a,b)$ die natürliche Einbettung von $\mathbb{I}$ in $\mathbb{R}^2$ und es seien $\pi_i:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Projektionen von $\mathbb{R}^2$ in die Koordinatenräume für $i = 1,2$.
Dann werden durch $f_i = \pi_i \circ e \circ F$, $i = 1,2$, Abbildungen von M in $\mathbb{R}$ definiert, die $F(X) = [f_1(X), f_2(X)]$ erfüllen für alle $X \in M$. Man schreibt auch $F = [f_1, f_2]$ und die f_i heißen die Randfunktionen von F. Sie sind nach Konstruktion eindeutig bestimmt. Umgekehrt bestimmt jedes Paar von Abbildungen $g_1, g_2:M \to \mathbb{R}$ mit $g_1(X) \leq g_2(X)$ für alle $X \in M$ durch die Festsetzung $G = [g_1, g_2]$ eindeutig eine I-Funktion $F:M \to \mathbb{I}$.

Es sei nun ein Paar von Abbildungen $f_1, f_2:M \to \mathbb{R}$ gegeben, für das nicht $f_1(X) \leq f_2(X)$ für $X \in M$ gefordert ist. Dann wird durch die Zuordnung $X \mapsto f_1(X) \vee f_2(X)$ eine I-Funktion $F = f_1 \vee f_2:M \to \mathbb{I}$ definiert. Es ist zu beachten, daß hier die Randfunktionen von F i.a. von f_1, f_2 verschieden sind.

Da man $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, |\cdot| \rangle$ als quasilinearen, normierten Teilraum von $\langle \mathbb{I}, +, \cdot, \|\cdot\|_m \rangle$ auffassen kann, wobei $|\cdot|$ die Betragsnorm auf $\mathbb{R}$ bezeichne, so ist durch 1.4.6 auch Stetigkeit für I-Funktionen $F:M \to \mathbb{I}$, $M \subset \mathbb{R}$, und für I-Funktionen $G:N \to \mathbb{R}$, $N \subset \mathbb{I}$, definiert.

Es besteht nun folgender Zusammenhang zwischen der Stetigkeit von I-Funktionen und der ihrer zugehörigen Randfunktionen:

Satz 1.4.14
Sei $F = [f,g]:M \to \mathbb{I}$, $M \subset \mathbb{I}$. Dann ist F genau dann stetig in $X_o \in M$, wenn f und g stetig sind in X_o.

Beweis. Falls F stetig ist in X_o, dann folgt wegen der Stetigkeit der Abbildungen π_i und e auch die der Abbildungen $f = \pi_1 \circ e \circ F$ und $g = \pi_2 \circ e \circ F$. Falls umgekehrt f und g stetig sind in X_o, dann folgt die Behauptung ähnlich wie im Reellen.

Für eine durch $F = f \vee g$, $f,g:M \to \mathbb{R}$, definierte I-Funktion $F:M \to \mathbb{I}$ folgt aus der Stetigkeit von f und g auch die von F. Die Umkehrung dieser Aussage gilt i.a. nicht mehr.

Seien $F,G:M \longrightarrow \mathbb{I}$, $M \subset \mathbb{I}$, und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann seien die I-Funktionen $F * G$, $cF:M \longrightarrow \mathbb{I}$, wobei $* \in \{+,-, \ominus, \oplus\}$ ist, komponentenweise erklärt. Bezeichnet man mit $\mathbb{I}\mathbb{F}(M, \mathbb{I})$ die Klasse aller I-Funktionen $F:M \to \mathbb{I}$, dann gilt: $\langle \mathbb{I}\mathbb{F}(M, \mathbb{I}), +, \cdot \rangle$ ist ein quasilinearer Raum.

Satz 1.4.15

Seien $F,G:M \longrightarrow \mathbb{I}$, $M \subset \mathbb{I}$, stetig in M. Dann sind auch die I-Funktionen $F * G$ und cF, $c \in \mathbb{R}$, $* \in \{+,-, \ominus, \oplus\}$, stetig.

Beweis. Der Beweis erfolgt mit Hilfe von 1.4.14 und mit der Stetigkeit des S-Operators (vgl. 1.4.9).

Bemerkung 1.4.16

(1) Aus 1.4.15 folgt noch, daß die Menge $C^{o}(M, \mathbb{I})$ aller auf M stetigen I-Funktionen einen quasilinearen Raum bildet mit der komponentenweise erklärten Addition und skalaren Multiplikation.

(2) Seien $F,G:M \to \mathbb{I}$, und für alle $x \in M$ gelte $0 \notin G(x)$. Dann ist für alle $x \in M$ $F(x)/G(x)$ erklärt, wobei / die von Markov in [10] eingeführte Hilfsdivision ist (vgl. auch 1.4.5). Für die so definierte I-Funktion F/G gilt dann: Falls F und G stetig sind in M, dann ist auch F/G stetig in M.

Auch die Komposition stetiger I-Funktionen ist wieder stetig.

Satz 1.4.17

Seien M,N Teilmengen von $\mathbb{I}$, und seien $F:M \to N$ und $G:M \to \mathbb{I}$ stetig. Dann ist auch $G \circ F:M \longrightarrow \mathbb{I}$ stetig.

Beweis. Sei $G = [g_1, g_2]$ und $G \circ F = [h_1, h_2]$. Dann gilt aber $h_i = g_i \circ F$ für $i = 1,2$ und damit folgt die Behauptung aus 1.4.14.

Schließlich gilt noch

Satz 1.4.18

Seien $F,G:M \to \mathbb{I}$ stetig in M. Dann ist auch die folgende durch die Zuordnung $X \mapsto F(X) V G(X)$ (wobei V den S-Operator bezeichne) definierte I-Funktion $FVG:M \to \mathbb{I}$ stetig in M.

Beweis. Der Beweis von 1.4.18 folgt sofort aus der Stetigkeit des S-Operators V (vgl. 1.4.9).

2 Einschließende Approximationen für Intervall-Funktionen und Optimalität für einschließende Approximationen

2.1 Überblick

Thema von § 2 sind einschließende Approximationen für Intervall-Funktionen und deren Optimalität.
In 2.2 wird zunächst der Begriff der einschließenden Approximation definiert. Dann wird für Approximationen $P: \mathbb{F} \to \mathbb{F}_1$ dieses Typs, wobei $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}_1$ Teilmengen von $\mathbb{I}\mathbb{F}(M,\mathbb{I})$ sind, ein Optimalitätsbegriff definiert,und für diesen werden Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen hergeleitet.
In § 2.3 wird der in 2.2 definierte Optimalitätsbegriff mittels ordnungstheoretischer Eigenschaften eingehender untersucht und charakterisiert. Mit Satz 2.3.16 wird ein Zusammenhang zwischen normalen Idealen in geordneten Mengen (zur Definition vgl. 2.3.18) und besten Approximationen hergeleitet. Isotone Approximationen haben die Eigenschaft, daß ihre Fixpunktmenge abgeschlossen ist bzgl. der Infimumsbildung, vgl. 2.3.19.
Man kann den Begriff des Ordnungshomomorphismus abschwächen. Dies führt zur Definition von konvexen Abbildungen, vgl.2.3.2o.
Zwischen dem in 2.2 eingeführten Optimalitätsbegriff und der von Kulisch in [8] entwickelten Theorie der monotonen Rundungen besteht ein Zusammenhang. Darauf wird zum Abschluß von 2.3 eingegangen.

Eine andere Möglichkeit, für einschließende Approximationen Optimalität zu definieren, wurde von Ratschek in [21] entwickelt. Dort wird Optimalität nur für die Teilklasse der berechenbaren Approximationen für $\mathbb{F}$ definiert. In § 2.4 werden die Definitionen und Ergebnisse aus [21] kurz wiedergegeben. Weiter wird untersucht, welche Beziehungen zwischen diesem Optimalitätsbegriff und dem aus § 2.2 bestehen. Abschließend wird anhand von Beispielen untersucht, wie sich die beiden vorgestellten Optimalitätsbegriffe für die Praxis eignen.

Einige Aussagen aus § 2.3 werden ohne Beweis notiert, da sie für das Folgende nicht mehr benötigt werden bzw. da die Beweise klar sind.

2.2 Einschließende Approximationen für Intervall-Funktionen, optimale Approximationen

Im folgenden bezeichne $\mathbb{I}$ stets die Menge der reellen, kompakten Intervalle. Mit $\subset$ werde die übliche Mengeninklusion bezeichnet.
Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Mit $\mathbb{I}\mathbb{F}(M, \mathbb{I})$ werde die Klasse aller intervallwertigen Abbildungen $F: M \longrightarrow \mathbb{I}$ bezeichnet.

Definition 2.2.1
Seien $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{I}\mathbb{F}(M, \mathbb{I})$. Dann heißt jede Abbildung $P: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}_1$ mit der Eigenschaft

'für jedes $F \in \mathbb{F}$ ist $F(x) \subset PF(x)$ für alle $x \in M$'

eine einschließende Approximation (kurz: Approximation) für $\mathbb{F}$ (durch $\mathbb{F}_1$).

Auf $\mathbb{I}\mathbb{F}(M, \mathbb{I})$ wird eine Ordnung $\leq$ erklärt durch:
Für $F, G \in \mathbb{I}\mathbb{F}(M, \mathbb{I})$ ist $F \leq G$ genau dann, wenn für alle $x \in M$ $F(x) \subset G(x)$ gilt. F und G sind gleich, in Zeichen $F = G$, wenn $F(x) = G(x)$ ist für alle $x \in M$. Wie üblich bedeute $F < G$, daß $F \leq G$ ist und $F \neq G$.

Alle im folgenden betrachteten Teilklassen von $\mathbb{I}\mathbb{F}(M, \mathbb{I})$ seien mit dieser Ordnung versehen. Da keine Verwechslungen zu befürchten sind, so werden die Einschränkungen der Ordnung $\leq$ auf Teilklassen von $\mathbb{I}\mathbb{F}(M, \mathbb{I})$ wieder mit $\leq$ bezeichnet.

Für $\mathbb{F}, \mathbb{F}_1$ werde in Zukunft die Klasse aller einschließenden Approximationen $P: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}_1$ für $\mathbb{F}$ mit $\mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ bezeichnet.
Für $\mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ soll nun ein Optimalitätsbegriff definiert werden ohne Verwendung einer Norm. Zuvor noch folgende Vereinbarung: Sei $\langle N, \leq \rangle$ geordnet und seien $x, y \in N$. Dann bedeute $x \| y$, daß x und y nicht vergleichbar sind bzgl. der Ordnung $\leq$.

Definition 2.2.2
Sei $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$. Dann heißt P

(a) beste Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ (kurz: beste Approximation), falls für jedes $F \in \mathbb{F}$ gilt: Ist $G \in \mathbb{F}_1$ mit $F \leq G$, dann folgt stets $G \geq PF$.

(b) optimale Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ (kurz: optimal), falls für jedes $F \in \mathbb{F}$ gilt: Ist $G \in \mathbb{F}_1$ mit $F \leq G$, dann folgt aus $G \in PF$ stets die Gleichheit $G = PF$.

Unter Heranziehung der zugrunde liegenden Ordnung erhält man die

Bemerkung 2.2.3

(1) Es gibt höchstens eine beste Approximation, dagegen können mehrere optimale Approximationen existieren.

(2) Eine beste Approximation ist optimal, die Umkehrung gilt i.a. nicht.

(3) Ist $P \in \mathcal{A}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ beste (optimale) Approximation für $\mathbb{F}$, dann ist für jedes $\mathbb{F}' \subset \mathbb{F}$ $P' = P \mid \mathbb{F}'$ beste (optimale) Approximation für $\mathbb{F}'$.

(4) Falls $P_1, P_2 \in \mathcal{A}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ optimal sind, dann gilt für jedes $F \in \mathbb{F}$: Entweder ist $P_1F = P_2F$ oder $P_1F \parallel P_2F$.

(5) Es tritt häufig die Frage auf, ob die Hintereinanderausführung von besten (optimalen) Approximationen wieder beste (optimale) Approximation ist.
Sei z.B. $\mathbb{F}(M, \mathbb{R})$ eine Klasse von reellen Abbildungen, die vermöge der Approximation $P: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}_1$ durch eine Klasse $\mathbb{F}_1(M, \mathbb{I})$ von Intervall-Funktionen eingeschlossen wird. Die Elemente von $\mathbb{F}_1$ wiederum werden auf einer Rechenanlage durch Maschinenintervall-Funktionen eingeschlossen, was durch eine Approximation $P_1: \mathbb{F}_1 \longrightarrow \mathbb{F}_2$ beschrieben werden kann, wobei $\mathbb{F}_2$ die Menge der verfügbaren Maschinenintervall-Funktionen sei. Sind die Approximationen P, P_1 optimal, so interessiert nun auch, ob die Approximation $P_1 \circ P: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}_2$ optimal ist.
Fragestellungen dieser Art tauchen auch in der Theorie der monotonen Rundungen auf, vgl. Kulisch [8].
Im allgemeinen ist die Verknüpfung von besten (optimalen) Approximationen nicht mehr beste (optimale) Approximation. Falls umgekehrt $P_2 \circ P_1$ beste (optimale) Approximation ist, so braucht dies weder für die Approximation P_1 noch für die Approximation P_2 zuzutreffen.
Man kann für die Komposition $P_2 \circ P_1$ von Approximationen $P_1 \in \mathcal{A}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$, $P_2 \in \mathcal{A}(\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2)$, mit Hilfe von mengenwertigen Abbildungen notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angeben, daß $P_2 \circ P_1$ beste bzw. optimale Approximation ist. Da diese Fragestellung für die vorliegende Arbeit nicht von Bedeutung ist, so soll darauf nicht weiter eingegangen werden.

Beispiel 2.2.4

Sei $M = [a,b] \in \mathbb{I}$, und sei $\mathbb{F}(M, \mathbb{I})$ die Menge der Intervall-Funktionen $F: M \longrightarrow \mathbb{I}$ mit $F(x) \subset F(y)$ für alle $x, y \in M$ mit $x < y$. Weiter sei $\mathbb{F}_1(M, \mathbb{I})$ die Menge der auf M konstanten Intervall-Funtionen $F: M \longrightarrow \mathbb{I}$, d.h. für

$F \in \mathbb{F}_1$ ist $F(x) = C$ für alle $x \in M$, $C \in \mathbb{I}$.
Für $F \in \mathbb{F}$ sei nun $PF(x) = F(b)$ für alle $x \in M$. Dann ist $PF \in \mathbb{F}_1$. Also wird durch die Zuordnung $F \mapsto PF$ eine Abbildung $P: \mathbb{F} \to \mathbb{F}_1$ definiert. Nach Definition von $\mathbb{F}$ ist P eine einschließende Approximation für $\mathbb{F}$, d.h. es ist $P \in \mathcal{U}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$.
P ist beste Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{U}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$. Denn sei $F \in \mathbb{F}$ und $G \in \mathbb{F}_1$ mit $F \leq G$. Dann folgt aber insbesondere $F(b) \subset G(b)$ und daher $PF \leq G$. Also ist P beste Approximation.

In Zukunft soll statt Intervall-Funktion kurz I-Funktion geschrieben werden.

Zu jeder I-Funktion $F: M \to \mathbb{I}$ existieren zwei reelle Abbildungen $f,g: M \to \mathbb{R}$, so daß für alle $x \in M$ $F(x) = [f(x), g(x)]$ gilt. Diese sind eindeutig durch F bestimmt und heißen die zu F gehörigen Randfunktionen, man schreibt auch kurz $F = [f,g]$ (vgl. auch 1.4).

Beispiel 2.2.5
Sei $M = [o,1]$ und sei $\mathbb{F}(M, \mathbb{I})$ die Menge der I-Funktionen $F = [f,g]: M \to \mathbb{I}$ mit: (a) f,g sind konvex und differenzierbar in M, (b) für alle $x,y \in M$ mit $x < y$ folgt $F(x) \subset F(y)$.
Weiter sei $\mathbb{F}_1(M, \mathbb{I})$ die Menge aller Intervall-Polynome (kurz: I-Polynome) 1-ten Grades $F: M \to \mathbb{I}$ um $x_o = o$, für die $F(x) \subset F(y)$ ist für alle $x,y \in M$ mit $x < y$. Dabei versteht man unter einem I-Polynom 1-ten Grades um x_o eine Abbildung der Form $F(x) = A_o + (x-x_o)A_1$ mit $A_o, A_1 \in \mathbb{I}$ und $x \in M$.
Dann sind die Elemente von $\mathbb{F}_1$ genau von der Form $F = [f,g]$, wobei f,g Polynome 1-ten Grades um $x_o = o$ sind, f monoton fallend und g monoton steigend ist.
Sei nun $z_o = 1 \in M$. Für $F = [f,g]$ sei weiter $PF = [p_1, p_2]: M \to \mathbb{I}$ wie folgt definiert:
Sei p_2 die reelle Abbildung, deren Graph die Gerade durch $(o, g(o))$ und durch $(1, g(1))$ ergibt. Weiter sei p_1 jene Abbildung, deren Graph die Gerade durch $(z_o, f(z_o))$ mit der Steigung $f'(z_o)$ ergibt.
Da f und g konvex sind, so gilt $p_1(x) \leq f(x)$ und $g(x) \leq p_2(x)$ für alle $x \in M$. Also ist $F \subset PF$, und durch obige Konstruktion wird eine einschließende Approximation $P: \mathbb{F} \to \mathbb{F}_1$ definiert, denn p_1 ist fallend und p_2 ist steigend nach Konstruktion.
P ist nun optimal für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{U}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$. Denn sei $F \in \mathbb{F}$ und sei $Q = [q_1, q_2] \in \mathbb{F}_1$ mit $F \leq Q$ und $Q \leq PF = [p_1, p_2]$. Dann ist also $q_2 \leq p_2$.

Nach Konstruktion von p_2 folgt daraus aber sofort $p_2 = q_2$.
Es ist $p_1 \leq q_1$. Also folgt insbesondere $p_1(z_o) = q_1(z_o)$ und damit auch $q_1 = p_1$. Es gilt daher $PF = Q$.
Nach Definition 2.2.2 ist daher P optimal.
P ist nicht beste Approximation für $\mathbb{F}$. Der Nachweis hierzu wird mit Hilfe von 2.3.14 geführt.
Seien $F,G \in \mathbb{F}$ wie folgt definiert: $F(x) = [x^2-2x, x^2]$, $G(x) = [-(1/2)-x, x^2]$, $x \in M$. Dann gilt $F \leq G$.
Es ist $PF(x) = [-1,x]$ und $PG(x) = [-(1/2)-x, x]$.
Für die durch $x \to PF(x) \cap PG(x)$ definierte I-Funktion $PF \cap PG: M \longrightarrow \mathbb{I}$ gilt jedoch: $PF \cap PG \notin \mathbb{F}_1$. Wegen 2.3.14 ist P daher nicht beste Approximation.

Man kann mit Hilfe von mengenwertigen Abbildungen beschreiben, wann eine Abbildung $P: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}, \mathbb{F}_1 \subset \mathbb{I}^{\mathbb{F}(M,\mathbb{I})}$, einschließende Approximation für $\mathbb{F}$ (durch $\mathbb{F}_1$) ist.
Für das Folgende sei stets $\mathbb{F}, \mathbb{F}_1 \subset \mathbb{I}^{\mathbb{F}(M,\mathbb{I})}$, wobei $M \subset \mathbb{R}$ ist.
Sei $\widetilde{\Phi}: \mathbb{F} \cup \mathbb{F}_1 \longrightarrow \mathbb{F}_1$ mit $F \mapsto \widetilde{\Phi}(F) = \{G \in \mathbb{F}_1 \;/\; F \leq G\}$.
Weiter sei $\widetilde{\Phi}|\mathbb{F} = \Phi$ und $\widetilde{\Phi}|\mathbb{F}_1 = \Phi_1$.
Die Abbildung $\widetilde{\Phi}$ ordnet also jedem $F \in \mathbb{F}$ die Menge aller $G \in \mathbb{F}_1$ zu, die F auf ganz M einschließen. Es gilt

Satz 2.2.6
Sei gegeben die Abbildung $P: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}_1$.
Dann ist $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ genau dann, wenn für alle $F \in \mathbb{F}$ $\Phi_1 \circ P(F) \subset \Phi(F)$ ist. Insbesondere gilt für jede Abbildung $Q: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}_1$, die für alle $F \in \mathbb{F}$ $\Phi_1 \circ Q(F) \subset \Phi_1 \circ P(F)$ erfüllt für eine Approximation $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$, auch $Q \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$.

Beweis. Sei zunächst $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$. Dann ist für jedes $F \in \mathbb{F}$ $F \leq PF$. Sei $G \in \Phi_1 \circ P(F)$. Nach Definition von Φ_1 gilt dann $PF \leq G$ und daher auch $F \leq G$, d.h. es ist $G \in \Phi(F)$.

Es gelte umgekehrt $\Phi_1 \circ P(F) \subset \Phi(F)$ für alle $F \in \mathbb{F}$. Nach Definition von Φ_1 gilt nun aber $PF \in \Phi_1 \circ P(F)$ für jedes $F \in \mathbb{F}$, und daher folgt $PF \in \Phi(F)$ für jedes $F \in \mathbb{F}$, d.h. $F \leq PF$, und damit ist $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$.
Der Rest der Behauptung ist klar.

Satz 2.2.7
Die Abbildung $P: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}_1$ ist genau dann beste Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$, wenn für alle $F \in \mathbb{F}$ $\Phi(F) = \Phi_1 \circ P(F)$ gilt, d.h. falls $\Phi = \Phi_1 \circ P$ ist.

Beweis. Sei $P \in \mathcal{U}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ beste Approximation und sei $F \in \mathbb{F}$.
Wegen 2.2.6 gilt dann $\Phi_1 \circ P(F) \subset \Phi(F)$.
Sei nun $H \in \Phi(F)$. Dann ist also $F \leq H$ und weiter $PF \leq H$, da P beste Approximation für $\mathbb{F}$ ist. Also folgt dann $H \in \Phi_1 \circ P(F)$ nach Definition von Φ_1.
$H \in \Phi(F)$ war beliebig, also ist auch $\Phi(F) \subset \Phi_1 \circ P(F)$, und damit gilt die Behauptung.
Sei umgekehrt $P: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}_1$ mit $\Phi_1 \circ P = \Phi$. Wegen 2.2.6 folgt dann zunächst $P \in \mathcal{U}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$. Sei nun $F \in \mathbb{F}$, und sei $H \in \mathbb{F}_1$ mit $F \leq H$. Aus den Voraussetzungen folgt dann $H \in \Phi_1 \circ P(F)$ und damit nach Definition von Φ_1 $PF \leq H$.
$H \in \Phi(F)$ war beliebig, also ist P beste Appproximation für $\mathbb{F}$.

Satz 2.2.8
Eine Abbildung $P: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}_1$ ist genau dann optimale Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{U}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$, wenn für alle $F \in \mathbb{F}$ gilt:

(a) $\Phi_1 \circ P(F) \subset \Phi(F)$

(b) für jedes $R \in \mathcal{U}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ folgt aus $\Phi_1 \circ P(F) \subset \Phi_1 \circ R(F)$ die Gleichheit $\Phi_1 \circ P(F) = \Phi_1 \circ R(F)$.

Beweis. Sei P optimal. Dann gilt (a) wegen 2.2.6. Sei $R \in \mathcal{U}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ mit $\Phi_1 \circ P(F) \subset \Phi_1 \circ R(F)$ für ein $F \in \mathbb{F}$. Dann folgt insbesondere $PF \in \Phi_1 \circ R(F)$ und damit $RF \leq PF$. Da P optimal ist, so erhält man $RF = PF$ und damit auch Teil (b) der Behauptung.
Es gelten (a) und (b). Wegen (a) ist dann $P \in \mathcal{U}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$.
Für $F_o \in \mathbb{F}$ gelte nun $F_o \leq G \leq PF$ für ein $G \in \mathbb{F}_1$. Dann sei $R \in \mathcal{U}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ definiert durch $RF = PF$ für $F \neq F_o$ und $RF_o = G$.
Dann ist $\Phi_1 \circ P(F_o) \subset \Phi_1 \circ R(F_o)$, und wegen (b) gilt hier die Gleichheit.
Daraus folgt nun aber nach Definition von Φ_1 sofort $PF_o = RF_o = G$.
Also ist P optimal für F bzgl. $\mathcal{U}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$.

Mit Hilfe von 2.2.7 bzw. 2.2.8 wird es i.a. nicht möglich sein zu entscheiden, ob eine Abbildung $P: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}_1$ Approximation bzw. beste (optimale) Approximation für $\mathbb{F}$ ist.
Im folgenden Abschnitt 2.3 werden mit Mitteln der Ordnungstheorie Kriterien hergeleitet, anhand derer man entscheiden kann, ob ein vorgegebenes $P \in \mathcal{U}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ beste bzw. optimale Approximation ist.

Seien $\mathbb{F}, \mathbb{F}_1 \subset \mathbb{I}\,\mathbb{F}(M, \mathbb{I})$ und es gelte $\mathcal{U}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1) \neq \emptyset$. Dann wird durch
für $P, R \in \mathcal{U}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ ist $P \leq R$ genau dann, wenn $PF \leq RF$ ist für alle $F \in \mathbb{F}$ eine Ordnung auf $\mathcal{U}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ definiert. Es gilt:

Satz 2.2.9

Folgende Aussagen sind gleichwertig:

(1) $\langle \mathcal{O}\ell(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1), \sqsubseteq \rangle$ besitzt ein kleinstes (minimales) Element.

(2) Es existiert eine beste (optimale) Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}\ell(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$.

(3) Für jedes $F \in \mathbb{F}$ besitzt $\langle \phi(F), \leq \rangle$ ein kleinstes (minimales) Element.

Beweis. Aus (1) folgt (2): Sei $P \in \mathcal{O}\ell(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ kleinstes Element.
Dann ist P beste Approximation für F. Denn sei $F_o \in \mathbb{F}$ und $G \in \mathbb{F}_1$ mit $F_o \leq G$.
Sei $R \in \mathcal{O}\ell(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ definiert durch $RF = PF$ für $F \neq F_o$ und $RF_o = G$.
Nun gilt $P \sqsubseteq R$ und daher insbesondere $PF_o \leq RF_o = G$.
Das gilt für jedes $G \in \phi(F)$. Also ist P beste Approximation.

Aus (2) folgt (3): Sei $P \in \mathcal{O}\ell(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ beste Approximation. Für jedes $F \in \mathbb{F}$ ist dann $PF \in \phi(F)$ und für alle $G \in \phi(F)$ gilt $PF \leq G$ nach Definition. Also ist PF kleinstes Element von $\langle \phi(F), \leq \rangle$.

Aus (3) folgt (1): Für $F \in \mathbb{F}$ sei $\hat{F}$ das kleinste Element von $\langle \phi(F), \leq \rangle$.
Weiter sei $P: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}_1$ definiert durch $F \mapsto \hat{F}$. Ist dann $Q \in \mathcal{O}\ell(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$,
so gilt für alle $F \in \mathbb{F}$ $PF = \hat{F} \leq QF$, da $\hat{F}$ kleinstes Element von $\langle \phi(F), \leq \rangle$
ist. Also gilt $P \sqsubseteq Q$. Das gilt für jedes $Q \in \mathcal{O}\ell(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$, d.h. es gilt (1).

Bemerkung 2.2.10

(1) Falls eine beste Approximation $P \in \mathcal{O}\ell(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ existiert, dann ist sie mit jeder Approximation $Q: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}_1$ für $\mathbb{F}$ vergleichbar. Für optimale Approximationen trifft dies nicht zu.

(2) Für $P, R \in \mathcal{O}\ell(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ ist $P \sqsubseteq R$ genau dann, wenn für alle $F \in \mathbb{F}$ $\phi_1 \circ R(F) \subset \phi_1 \circ P(F)$ gilt.

(3) Für Teilklassen von $\mathcal{O}\ell(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ ist 2.2.9 i.a. nicht mehr gültig.

2.3 Zusammenhänge mit der Ordnungstheorie

Seien $\mathbb{F}, \mathbb{F}_1 \subset \mathbb{I}\,\mathbb{F}(M, \mathbb{I})$ und sei $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$. Dann kann man mit Begriffen aus der Ordnungstheorie Aussagen darüber machen, wann P beste bzw. optimale Approximation für $\mathbb{F}$ ist.

Seien $\langle N, \leq \rangle$ und $\langle M, \prec \rangle$ geordnete Mengen. Dann heißt die Abbildung $f: N \to M$ ein Ordnungshomomorphismus, falls für alle $x, y \in N$ mit $x \leq y$ $f(x) \prec f(y)$ folgt.

Definiton 2.3.1

Seien $\mathbb{F}, \mathbb{F}_1 \subset \mathbb{I}\,\mathbb{F}(M, \mathbb{I})$, $M \subset \mathbb{R}$, und sei $P: \mathbb{F} \to \mathbb{F}_1$.
P heißt isoton, falls P ein Ordnungshomomorphismus von $\langle \mathbb{F}, \leq \rangle$ in $\langle \mathbb{F}_1, \leq \rangle$ ist. Isotone Abbildungen werden auch häufig inklusionsmonoton genannt.

P heißt quasi-isoton, falls für alle $F, G \in \mathbb{F}$ mit $F \leq G$ gilt: Entweder ist $PF \leq PG$, oder es gilt $PF \parallel PG$.

Bemerkung 2.3.2

Isotone Abbildungen sind quasi-isoton, die Umkehrung gilt nicht.
Die Einschränkung einer (quasi-) isotonen Abbildung ist wieder (quasi-) isoton.
Die Komposition von isotonen Abbildungen ist wieder isoton. Für quasi-isotone Abbildungen trifft dies nicht mehr zu.

Hilfssatz 2.3.3

Seien $\mathbb{F}, \mathbb{F}_1 \subset \mathbb{I}\,\mathbb{F}(M, \mathbb{I})$, $M \subset \mathbb{R}$ und sei $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$. Dann folgt:

(1) Falls P beste Approximation ist, dann ist P isoton.

(2) Falls P optimal ist, dann ist P quasi-isoton.

Beweis. (1) Seien $F_1, F_2 \in \mathbb{F}$ mit $F_1 \leq F_2$. P ist beste Approximation, also ist $\Phi_1 \circ P(F_1) = \Phi(F_1)$. Andererseits ist $PF_2 \in \Phi(F_1)$ und daher auch $PF_2 \in \Phi_1 \circ P(F_1)$. Nach Definition von Φ_1 folgt dann aber $PF_1 \leq PF_2$.
F_1, F_2 waren beliebig, also ist P isoton.
(2) Angenommen, P ist nicht quasi-isoton. Dann existieren $F_1, F_2 \in \mathbb{F}$ mit $F_1 \leq F_2$ und $PF_1 > PF_2$. Sei nun $R: \mathbb{F} \to \mathbb{F}_1$ mit

$$RF = \begin{cases} PF, & \text{falls } F \neq F_1 \\ PF_2, & \text{falls } F = F_1 \end{cases}$$

Dann ist $R \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$, und es gilt $\Phi_1 \circ P(F) \subset \Phi_1 \circ R(F)$ für alle $F \in \mathbb{F}$.
P ist minimal, wegen 2.2.8 folgt also insbesondere $\Phi_1 \circ P(F_1) = \Phi_1 \circ R(F_1)$.

Das ist aber ein Widerspruch zu $PF_2 = RF_1 \notin \Phi_1 \circ P(F_1)$.
Also ist P quasi-isoton.

Hilfssatz 2.3.4

Seien $\mathbb{F}, \mathbb{F}_1 \subset \mathbb{I}\!\mathbb{F}(M, \mathbb{I})$, $M \subset \mathbb{R}$, und sei $P \in \mathcal{O}\ell(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ optimal. Dann gilt für alle $F \in \mathbb{F} \cap \mathbb{F}_1$ $PF = F$.
Die Behauptung gilt also insbesondere, falls P beste Approximation ist.

Beweis. Sei $F \in \mathbb{F} \cap \mathbb{F}_1$. Dann gilt also $F \leq G \leq PF$ mit $G = F \in \mathbb{F}_1$. Nach Voraussetzung ist P optimal, also folgt $G = PF$.
Somit gilt die Behauptung.

Umgekehrt gilt

Hilfssatz 2.3.5

Seien $\mathbb{F}, \mathbb{F}_1 \subset \mathbb{I}\!\mathbb{F}(M, \mathbb{I})$, $M \subset \mathbb{R}$, mit $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}$. Weiter sei $P \in \mathcal{O}\ell(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ mit $P | \mathbb{F}_1 = id_{\mathbb{F}_1}$. Dann folgt:

(1) Falls P isoton ist, dann ist P beste Approximation.

(2) Falls P quasi-isoton ist, dann ist P optimal.

Beweis. (1) Sei $F \in \mathbb{F}$ beliebig. Wegen 2.2.6 ist nur noch $\Phi(F) \subset \Phi_1 \circ P(F)$ zu zeigen nach 2.2.7. Sei also $G \in \Phi(F)$. Dann ist $F \leq G$. Wegen $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}$ ist weiter $G \in \mathbb{F}$, und man erhält aus der Isotonie von P $PF \leq PG$.
Da $G \in \mathbb{F}_1$ ist, so folgt nach Voraussetzung weiter $PG = G$. Also ist $PF \leq G$ und damit $G \in \Phi_1 \circ P(F)$. $G \in \Phi(F)$ war beliebig. Somit gilt $\Phi(F) \subset \Phi_1 \circ P(F)$.
Das gilt für jedes $F \in \mathbb{F}$, und daher ist P nach 2.2.7 beste Approximation.
(2) Sei $F \in \mathbb{F}$ beliebig und sei $G \in \Phi(F)$ mit $G \leq PF$.
Es ist $F \leq G$, und man erhält aus der Quasi-Isotonie von P entweder $PF \leq PG$ oder $PF \parallel PG$. Wegen $G \in \mathbb{F}_1$ folgt daher entweder $PF \leq G$ oder $PF \parallel G$.
Nach Annahme ist aber $G \leq PF$, also kann der Fall $PF \parallel G$ nicht eintreten.
Insgesamt gilt daher $G \leq PF \leq G$ und damit $G = PF$.
Somit ist P optimal für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}\ell(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$.

Aus 2.3.3 bis 2.3.5 folgt nun

Satz 2.3.6

Sei $P \in \mathcal{O}\ell(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$, und es gelte $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}$. Dann folgt:

(1) P ist beste Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}\ell(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ genau dann, wenn P isoton ist und $P | \mathbb{F}_1 = id_{\mathbb{F}_1}$ erfüllt.

(2) P ist optimal für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}\ell(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ genau dann, wenn P quasi-isoton

ist und $P|\mathbb{F}_1 = id_{\mathbb{F}_1}$ erfüllt.

Sei $f:N \to M$ mit $M \subset N$. Dann gilt: Es ist $f|M = id_M$ genau dann, wenn f surjektiv und idempotent (d.h. $f = f^2$) ist.
Damit erhält man die

Folgerung 2.3.7

Sei $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ und $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}$. Dann folgt:
P ist genau dann beste (optimale) Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$, wenn gilt: (a) P ist isoton (quasi-isoton),

(b) P ist surjektiv,

(c) P ist idempotent.

Für den Fall $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}$ hat man damit eine vollständige Charakterisierung für beste bzw. optimale Approximationen.

Beispiel 2.3.8

Seien $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}_1$ und $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ wie in 2.2.4.
Zunächst gilt $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}$, denn die auf M konstanten I-Funktionen F erfüllen $F(x) \subset F(y)$ für alle $x,y \in M$ mit $x < y$.
Nach Definition von P gilt für alle $F \in \mathbb{F}_1$ auch $PF = F$, d.h. es ist $P|\mathbb{F}_1 = id_{\mathbb{F}_1}$.
Seien $F,G \in \mathbb{F}$ mit $F \leq G$. Dann ist insbesondere $F(b) \subset G(b)$ und damit nach Definition von P auch $PF \leq PG$, also ist P isoton.
Wegen 2.3.6 ist daher P beste Approximation für $\mathbb{F}$.

Beispiel 2.3.9

Seien $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}_1$ und $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ wie in 2.2.5.
Es ist $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}$, denn jedes $F \in \mathbb{F}_1$ ist von der Form $F = [f,g]$, und f,g sind reelle Polynome 1-ten Grades um x_o, weiter ist f fallend und g steigend.
Nach Konstruktion von P gilt $P|\mathbb{F}_1 = id_{\mathbb{F}_1}$.
Seien $F,G \in \mathbb{F}$ mit $F \leq G$. Angenommen, es ist $PG < PF$.
Sei $F = [f_1,f_2]$, $G = [g_1,g_2]$, $PF = [p_1,p_2]$ und $PG = [q_1,q_2]$. Aus der Annahme $PG < PF$ folgt nun $p_1 \leq q_1$, $q_2 \leq p_2$ und $p_1 \neq q_1$ oder $p_2 \neq q_2$. Sei etwa $p_2 \neq q_2$. Dann folgt aber (vergl. 2.2.5) $g_2(o) < f_2(o)$ oder $g_2(1) < f_2(1)$.
Das ist aber ein Widerspruch zu $F \leq G$. Also muß entweder $PF \leq PG$ oder $PF \parallel PG$ gelten. Somit ist P auch quasi-isoton.
Damit folgt aus 2.3.6, daß P optimale Approximation für $\mathbb{F}$ ist.

Sei nun $P \in \mathcal{OL}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$, wobei nicht mehr $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}$ gilt. Falls P beste (optimale) Approximation für $\mathbb{F}$ ist, dann ist P nach 2.3.3 isoton (quasi-isoton), und nach 2.3.4 ist $PF = F$ für alle $F \in \mathbb{F} \cap \mathbb{F}_1$.
Diese beiden Bedingungen sind aber nicht mehr hinreichend dafür, daß P beste (optimale) Approximation für $\mathbb{F}$ ist, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 2.3.10
Sei $M = [0,1]$, und sei $\mathbb{F}'$ die Menge aller I-Funktionen $F: M \longrightarrow \mathbb{I}$ mit $F(x) \subset F(y)$ für $x, y \in M$ mit $x \leq y$. Weiter sei $\mathbb{P}^1_{x_0}(M, \mathbb{I})$ die Menge aller I-Polynome 1-ten Grades um $x_0 = 0$ von M in $\mathbb{I}$.
Dann sei $\mathbb{F} = \mathbb{F}' \setminus \mathbb{P}^1_{x_0}$ und $\mathbb{F}_1 = \mathbb{P}^1_{x_0}$. Die Approximation $P \in \mathcal{OL}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ sei wie in 2.2.4 definiert.
Nach Konstruktion sind $\mathbb{F}$ und $\mathbb{F}_1$ disjunkt. P ist isoton und erfüllt $PF = F$ für alle $F \in \mathbb{F} \cap \mathbb{F}_1$. P ist aber nicht optimal. Denn für die I-Funktion $Q \in \mathbb{F}$, die definiert ist durch $x \longmapsto [-1,1]x^2$, $x \in M$, gilt:
Es ist $PQ = [-1,1]$, und für $G \in \mathbb{F}_1$ mit $G(x) = [-1,1]x$ ist $Q \leq G \leq PQ$ und $G \neq PQ$.

Für jede Approximation $P \in \mathcal{OL}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ gilt $P(\mathbb{F}) \subset \bigcup_{\mathbb{F}} \Phi(F)$.

Für $P \in \mathcal{OL}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ mit $\mathbb{F}_1 \not\subset \mathbb{F}$ gilt das folgende hinreichende Kriterium über die Optimalität von P (das nicht umkehrbar ist):

Satz 2.3.11
Sei $P \in \mathcal{OL}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$, dann gilt

(1) Sei P isoton, und es gelte $P(\mathbb{F}) = \bigcup_{\mathbb{F}} \Phi(F)$ (was z.B. erfüllt ist bei Surjektivität). Weiter gelte für alle $F \in \mathbb{F}$: Zu jedem $Q \in \Phi(F)$ existiert ein $G \in P^{-1}(Q)$ mit $F \leq G$. Dann ist P beste Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{OL}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$.

(2) Sei P quasi-isoton, und für alle $F \in \mathbb{F}$ gelte: Für jedes $Q \in \Phi(F)$ mit $Q \leq PF$ ist (a) $Q \in P(\mathbb{F})$ und (b) existiert ein $G \in P^{-1}(Q)$ mit $F \leq G$. Dann ist P optimal für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{OL}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$.

Beweis. (1) Sei $F \in \mathbb{F}$ und sei $Q \in \Phi(F)$. Dann ist $Q \in P(\mathbb{F})$ nach Voraussetzung, und es gibt ein $G \in P^{-1}(Q)$ mit $F \leq G$. Nun ist P isoton, also folgt $PF \leq PG = Q$. $Q \in \Phi(F)$ war beliebig. Also gilt die Behauptung.

(2) Sei $F \in \mathbb{F}$ und $Q \in \Phi(F)$ mit $Q \leq PF$. Nach Voraussetzung ist dann $Q \in P(\mathbb{F})$, und es gibt ein $H \in P^{-1}(Q)$ mit $F \leq H$. Da P quasi-isoton ist, so folgt entweder $PF \leq Q$ oder $PF \parallel Q$. Wegen $Q \leq PF$ nach Annahme kann der letzte Fall nicht eintreten, und man erhält $Q = PF$. $Q \in \Phi(F)$ war beliebig. Also ist P optimal.

Satz 2.3.12

Seien $\mathbb{F}, \mathbb{F}_1 \subset \mathbb{I}\mathbb{F}(M,\mathbb{I})$, $M \subset \mathbb{R}$. Dann gilt: Es gibt genau dann eine beste (optimale) Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$, wenn es eine beste (optimale) Approximation für $\mathbb{F} \cup \mathbb{F}_1$ bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F} \cup \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_1)$ gibt.
Jede beste (optimale) Approximation $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ für $\mathbb{F}$ läßt sich eindeutig zur besten (einer optimalen) Approximation $R \in \mathcal{O}(\mathbb{F} \cup \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_1)$ für $\mathbb{F} \cup \mathbb{F}_1$ fortsetzen. Falls umgekehrt $R \in \mathcal{O}(\mathbb{F} \cup \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_1)$ beste (eine optimale) Approximation für $\mathbb{F} \cup \mathbb{F}_1$ ist, dann ist $P = R|\mathbb{F} \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ beste (eine optimale) Approximation für $\mathbb{F}$, und es gilt $R|\mathbb{F}_1 = id_{\mathbb{F}_1}$.

Beweis. Sei $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ beste Approximation. Für alle $F \in \mathbb{F} \cap \mathbb{F}_1$ gilt dann nach 2.3.4 $PF = F$. Daher erhält man durch die Definition

$$RF = \begin{cases} PF, & \text{falls } F \in \mathbb{F} \\ F, & \text{falls } F \in \mathbb{F}_1 \end{cases}$$

eine Approximation $R: \mathbb{F} \cup \mathbb{F}_1 \to \mathbb{F}_1$ für $\mathbb{F} \cup \mathbb{F}_1$.
Man zeigt leicht, daß R isoton ist. Nach Konstruktion von R ist weiter $R|\mathbb{F}_1 = id_{\mathbb{F}_1}$. Wegen 2.3.6 ist R daher beste Approximation für $\mathbb{F} \cup \mathbb{F}_1$.
Falls umgekehrt $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F} \cup \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_1)$ beste Approximation für $\mathbb{F} \cup \mathbb{F}_1$ ist, dann ist auch $R|\mathbb{F} = P$ beste Approximation für $\mathbb{F}$ (vgl. 2.2.3,(3)).
Der Rest der Behauptung ist klar.
Der Beweis für optimale Approximationen verläuft analog.

Seien $f: A \to C$ und $g: B \to C$ mit $f|A \cap B = g|A \cap B$. Dann ist die Abbildung $f \cup g: (A \cup B) \to C$ definiert durch

$$f \cup g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in A \\ g(x), & \text{falls } x \in B. \end{cases}$$

Man erhält aus 2.3.12

Satz 2.3.13

Sei $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$, dann folgt:

P ist genau dann beste (optimale) Approximation für $\mathbb{F}$, wenn gilt:

(a) P ist isoton (quasi-isoton),

(b) für alle $F \in \mathbb{F} \cap \mathbb{F}_1$ ist $PF = F$,

(c) $R = P \cup id_{\mathbb{F}_1}$ ist isotone (quasi-isotone) Erweiterung von P auf $\mathbb{F} \cup \mathbb{F}_1$.

Als nächstes soll eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür hergeleitet werden, wann eine optimale Approximation beste Approximation ist.

Sei $P \in \mathcal{O}\ell(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$. Dann gilt für je zwei I-Funktionen $F,G \in \mathbb{F}$ mit $F \leq G$: Für alle $x \in M$ (M gemeinsamer Definitionsbereich von $\mathbb{F}$ und $\mathbb{F}_1$) ist $PF(x) \cap PG(x) \neq \emptyset$ und damit aus $\mathbb{I}$. Denn für jedes $x \in M$ gilt dann ja $F(x) \subset PF(x)$ und $F(x) \subset PG(x)$.
Also wird durch jedes Paar $F,G \in \mathbb{F}$ mit $F \leq G$ eine Abbildung $PF \cap PG: M \longrightarrow \mathbb{I}$ definiert durch $x \longmapsto PF(x) \cap PG(x)$. Die I-Funktion $PF \cap PG$ wird natürlich i.a. kein Element aus $\mathbb{F}_1$ sein. Es gilt

Satz 2.3.14

Sei $P \in \mathcal{O}\ell(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ optimal für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}\ell(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$. Weiter sei $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}$. P ist genau dann beste Approximation für $\mathbb{F}$, wenn für alle $F,G \in \mathbb{F}$ mit $F \leq G$ stets $PF \cap PG \in \mathbb{F}_1$ folgt.

Beweis. Sei P beste Approximation, und seien $F \leq G$ aus $\mathbb{F}$. Dann ist P isoton und es gilt $PF \leq PG$. Also gilt auch $PF \cap PG = PF \in \mathbb{F}_1$, da P in $\mathbb{F}_1$ abbildet.
Für alle $F,G \in \mathbb{F}$ mit $F \leq G$ gelte $PF \cap PG \in \mathbb{F}_1$. Es ist nur noch zu zeigen, daß P isoton ist. Seien also $F,G \in \mathbb{F}$ mit $F \leq G$. Dann gilt $F \leq PF \cap PG$ und $PF \cap PG \leq PF$. Nach Voraussetzung ist aber $PF \cap PG \in \mathbb{F}_1$. Da P optimal ist, so folgt also $PF \cap PG = PF$. Dies ist aber gleichbedeutend mit $PF \leq PG$. Also ist P isoton und daher auch beste Approximation.

Bemerkung 2.3.15

Verzichtet man auf die Forderung $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}$, dann gilt unter den übrigen Voraussetzungen von 2.3.14: P ist genau dann beste Approximation für $\mathbb{F}$, falls für alle $F,G \in \mathbb{F} \cup \mathbb{F}_1$ mit $F \leq G$ $P'F \cap P'G \in \mathbb{F}_1$ folgt, wobei $P' = P \cup id_{\mathbb{F}_1}$ ist. Der Beweis verläuft genauso wie in 2.3.14, wenn man noch beachtet, daß in diesem Falle $P' = P \cup id_{\mathbb{F}_1}$ optimal für $\mathbb{F} \cup \mathbb{F}_1$ ist (vgl.2.3.12).

In 2.2 und 2.3 sind beste bzw. optimale Approximationen mit Hilfe von mengenwertigen Abbildungen bzw. durch Isotonie und Idempotenz beschrieben worden. Eine andere Möglichkeit, bei der die Bildmenge $\mathbb{F}_1$ bzw. ihre Teilmengen mehr im Vordergrund stehen, ist die folgende:

Sei $f: N \longrightarrow N$, wobei N irgendeine Menge ist, und sei $M \subset N$. Dann heißt M f-invariant, falls $f(M) \subset M$ ist.
Sei $\langle N, \leq \rangle$ eine geordnete Menge, und sei $M \subset N$ nicht leer. Weiter sei $M^+ = \{n \in N / \; n \leq m \text{ für alle } m \in M\}$ und $M^* = \{n \in N / \; m \leq n \text{ für alle } m \in M\}$.
Für $M = \emptyset$ sei $M^+ = M^* = N$.

Dann kann man beste Approximationen wie folgt charakterisieren:

Satz 2.3.16

Sei $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$, und es gelte $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}$. Dann folgt:

P ist genau dann beste Approximation für $\mathbb{F}$, wenn für jedes $M \subset \mathbb{F}_1$ die Menge M^+ P-invariant ist.

Beweis. Sei P beste Approximation und sei $M \subset \mathbb{F}_1$.
Falls $M^+ = \emptyset$ ist, dann ist nichts zu zeigen.
Sei also $M^+ \neq \emptyset$. Dann gilt für jedes $F \in M^+$ $F \leq G$ für alle $G \in M$. Daraus folgt wegen der Isotonie von P und wegen $P \mid \mathbb{F}_1 = id_{\mathbb{F}_1}$ $PF \leq PG = G$ für alle $G \in M$. Nach Definition von M^+ folgt daher auch $PF \in M^+$. $F \in M^+$ war beliebig, also gilt $P(M^+) \subset M^+$.
Es gelte umgekehrt $P(M^+) \subset M^+$ für alle $M \subset \mathbb{F}_1$.
Wegen $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}$ ist zu zeigen, daß P isoton ist und $P \mid \mathbb{F}_1 = id_{\mathbb{F}_1}$ erfüllt.
Seien $F, G \in \mathbb{F}$ mit $F \leq G$. Es ist $PG \in \mathbb{F}_1$ und $\{PG\}^+$ ist P-invariant.
Nun gilt $F \in \{PG\}^+$ und daher auch $PF \in \{PG\}^+$. Nach Definition von M^+ folgt daher $PF \leq PG$. Somit ist P isoton.
Sei $F \in \mathbb{F}_1$. Nun gilt $F \in \{F\}^+$, und $\{F\}^+$ ist P-invariant. Also ist $PF \in \{F\}^+$, d.h. es ist $PF \leq F$. Da P Approximation ist, so folgt $F = PF$.
Also erfüllt P auch $P \mid \mathbb{F}_1 = id_{\mathbb{F}_1}$.

Folgerung 2.3.17

Seien $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{I}\mathbb{F}(M, \mathbb{I})$ mit $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}$. Falls ein $M \subset \mathbb{F}_1$ existiert mit $M^+ \neq \emptyset$, und falls ein $F \in M^+$ existiert mit $M^+ \cap \Phi(F) = \emptyset$ (was z.B. erfüllt ist, falls $M^+ \cap \mathbb{F}_1 = \emptyset$ ist), dann gibt es keine bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ beste Approximation für $\mathbb{F}$.

Bemerkung 2.3.18

Sei $\langle N, \leq \rangle$ geordnet. Dann sind Mengen der Form M^+, $M \subset N$, mit $M^+ \neq \emptyset$ Ideale, genauer normale Ideale von $\langle N, \leq \rangle$. Die Begriffsbildung von Idealen bzw. von Filtern in geordneten Mengen stammt von O. Frink, vgl. [4].
Eine Teilmenge $I \neq \emptyset$ von N heißt Ideal, wenn für alle endlichen Teilmengen E von I $E^{*+} \subset I$ ist. I heißt normales Ideal, falls $I = I^{*+}$ ist.
Beispiele für normale Ideale sind N selbst und alle Mengen der Form $(n] = \{m \in N / m \leq n\}$, $n \in N$ fest. Die Mengen der Form $(n]$, $n \in N$, werden auch Hauptideale genannt.
Filter in geordneten Mengen sind dual zu Idealen definiert.
Die Definition von Frink verallgemeinert den Ideal-(Filter-)Begriff für Verbände, genauer gilt: Ist $\langle N, \leq \rangle$ geordnet und I ein Ideal von $\langle N, \leq \rangle$, und ist $\langle N, \leq \rangle$ gleichzeitig ein Verband, dann ist I ein Verbandsideal.
(Sei $\langle V, \vee, \wedge \rangle$ ein Verband, dann ist ein (Verbands-)Ideal eine Teilmenge I

von V mit den Eigenschaften (a) für alle $x,y \in I$ ist $x \vee y \in I$, (b) für $x \in N$, $y \in I$ mit $x \leq y$ ist $x \in I$.)
Ist umgekehrt $\langle V, \vee, \wedge \rangle$ ein Verband, und ist $\preceq$ die durch die Verbandsoperationen induzierte Ordnung, und ist weiter I ein Verbandsideal, dann ist I ein Ideal der geordneten Menge $\langle V, \preceq \rangle$.
Mit Hilfe von normalen Idealen kann man nun die Aussage 2.3.16 auch wie folgt formulieren:
Es gelten die Voraussetzungen von 2.3.16. Dann ist P genau dann beste Approximation für $\mathbb{F}$, wenn alle vermöge der Abbildung $^+$ durch $\mathbb{F}_1$ erzeugten normalen Ideale (das sind die Mengen der Form M^+ mit $M \subset \mathbb{F}_1$ und $M^+ \neq \emptyset$) P-invariant sind.

Isotone Approximationen und damit insbesondere beste Approximationen haben die Eigenschaft, daß ihre Fixpunktmenge abgeschlossen ist gegenüber der Infimumsbildung.
Sei $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ isoton, und es gelte $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}$. Mit $\mathcal{F}_P$ werde die Menge aller Fixpunkte von P bezeichnet. Offenbar sind dann alle maximalen Elemente von $\langle \mathbb{F}, \leq \rangle$ Fixpunkte von P.

Satz 2.3.19

Sei $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ isoton, und sei $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}$. Dann gilt für jede Teilmenge M von $\mathcal{F}_P$: Alle maximalen Elemente von $\langle M^+, \leq \rangle$ sind Fixpunkte von P. Insbesondere ist das Infimum von M, falls es existiert, ein Fixpunkt von P.

Beweis. Falls $\mathcal{F}_P = \emptyset$ ist, dann besitzt $\langle \mathbb{F}, \leq \rangle$ keine maximalen Elemente, und es ist nichts zu zeigen.
Sei $\mathcal{F}_P \neq \emptyset$ und sei $M \subset \mathcal{F}_P$ mit $M^+ \neq \emptyset$. Man zeigt dann genauso wie in 2.3.16, daß M^+ P-invariant ist. Sei nun $F \in M^+$ maximal. Da M^+ P-invariant ist, so folgt $PF \in M^+$. Da P Approximation ist, so folgt weiter $F \leq PF$. Da F maximales Element von $\langle M^+, \leq \rangle$ ist, so erhält man daher $F = PF$, d.h. es ist $F \in \mathcal{F}_P$.
Es existiere $\inf M = F_o$. Dann ist $M^+ = (F_o] = \{F \in \mathbb{F} / F \leq F_o\}$. Also ist F_o größtes Element von $\langle M^+, \leq \rangle$ und daher $F_o \in \mathcal{F}_P$.

Für Gleichungen der Form $f(x) = b$ ist es häufig von Interesse zu wissen, ob die Lösungsmenge für vorgegebenes b konvex ist.
Isotone Abbildungen und allgemeiner Homomorphismen zwischen geordneten Mengen haben diese Eigenschaft.

Sei $\langle N,\leq\rangle$ geordnet und seien $x,y\in N$ mit $x\leq y$. Dann heißt die Menge der Form $\{z\in N/\ x\leq z\leq y\} = [x,y]$ das Intervall mit den Eckpunkten x und y. Eine Teilmenge K von $\langle N,\leq\rangle$ heißt konvex, wenn K mit je zwei Elementen $x,y,\ x\leq y$, auch das Intervall $[x,y]$ enthält.
Beispiele von konvexen Mengen in $\langle N,\leq\rangle$ sind alle Intervalle von N, die leere Menge, N selbst, Ideale und Filter von $\langle N,\leq\rangle$.

Eine Teilmenge A (E) von $\langle N,\leq\rangle$ heißt Anfang (Ende) von $\langle N,\leq\rangle$, falls für alle $x\in N$, $y\in A$ $(y\in E)$ aus $x\leq y$ $(y\leq x)$ stets $x\in A$ $(x\in E)$ folgt.
Anfänge und Enden sind stets konvexe Mengen.
Zwischen Anfängen, Enden und konvexen Mengen besteht der folgende Zusammenhang

Satz 2.3.20

Die konvexen Mengen von $\langle N,\leq\rangle$ sind genau alle Mengen der Form $A\cap E$, wobei A ein Anfang und E ein Ende von $\langle N,\leq\rangle$ ist.

Der Durchschnitt konvexer Mengen aus $\langle N,\leq\rangle$ ist wieder konvex. Also gibt es zu jeder Teilmenge M von N eine kleinste konvexe Obermenge. Diese wird mit conv M bezeichnet. Insbesondere gilt also für die Menge $\{x,y\}$, $x,y\in N$, $\operatorname{conv}\{x,y\} = \{x,y\}$, falls $x\parallel y$ bzw. $\operatorname{conv}\{x,y\} = x\vee y$, falls x,y vergleichbar sind (dabei sei $x\vee y$ das Intervall mit den Eckpunkten x und y).
Nun gilt

Satz 2.3.21

Sei $f:N\to M$ ein Homomorphismus der geordneten Mengen $\langle N,\leq\rangle$ und $\langle M,\preceq\rangle$. Ist K eine konvexe Teilmenge von $\langle M,\preceq\rangle$, dann ist $f^{-1}(K)$ eine konvexe Teilmenge von $\langle N,\leq\rangle$.

Beweis. Sei $K\subset M$ konvex. Falls $f^{-1}(K) = \emptyset$ ist, dann gilt die Behauptung. Seien also $x,y\in f^{-1}(K)\neq\emptyset$ mit $x\leq y$. Dann gibt es $a,b\in K$ mit $f(x)=a$, $f(y)=b$. Da f ein Ordnungshomomorphismus ist, so folgt $a\preceq b$. Sei nun $z\in[x,y]$. Dann folgt aber $a\preceq f(z)\preceq b$, d.h. $f(z) = c\in[a,b]$. Nach Voraussetzung ist K konvex, also gilt $c\in[a,b]\subset K$. Daraus folgt weiter $z\in f^{-1}(c)\subset f^{-1}(K)$.
Da $z\in[x,y]$ beliebig war, so folgt also $[x,y]\subset f^{-1}(K)$.
Das gilt für alle $x,y\in f^{-1}(K)$ mit $x\leq y$. Also ist $f^{-1}(K)$ konvex.

Bemerkung 2.3.22

Die Aussage 2.3.21 bleibt auch richtig, wenn f ein Anti-Homomorphismus von $\langle N,\leq\rangle$ in $\langle M,\preceq\rangle$ ist, d.h. falls für alle $x,y\in N$ mit $x\leq y$ $f(y)\preceq f(x)$ folgt.

Da einpunktige Mengen in geordneten Mengen konvex sind, so folgt aus 2.3.21 insbesondere:
Falls f ein (Anti-) Homomorphismus von $\langle N,\leq\rangle$ in $\langle M,\preccurlyeq\rangle$ ist, dann ist für jedes $m\in M$ die Lösungsmenge von $f(x) = m$ konvexe Teilmenge von $\langle N,\leq\rangle$.

Aussage 2.3.21 läßt sich nicht umkehren. Es gilt jedoch der

Satz 2.3.23

Seien $\langle N,\leq\rangle$ und $\langle M,\preccurlyeq\rangle$ geordnet, und sei $f:N\to M$. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:

(1) f ist ein Ordnungshomomorphismus.

(2) Die Urbilder von Anfängen aus $\langle M,\preccurlyeq\rangle$ unter f sind Anfänge in $\langle N,\leq\rangle$.

(3) Die Urbilder von Enden aus $\langle M,\preccurlyeq\rangle$ unter f sind Enden in $\langle N,\leq\rangle$.

Eine analoge Aussage gilt für Anti-Homomorphismen.

Man kann den Begriff des Ordnungshomomorphismus abschwächen:
Seien $\langle N,\leq\rangle$ und $\langle M,\preccurlyeq\rangle$ geordnete Mengen, und sei $f:N\to M$. f heißt konvex, falls für alle $x,y\in N$ mit $x\leq y$ und für alle $z\in[x,y]$ $f(z)\in \operatorname{conv}\{f(x),f(y)\}$ folgt. Dann kann man konvexe Abbildungen wie folgt charakterisieren:

Satz 2.3.24

Seien $\langle N,\leq\rangle$ und $\langle M,\preccurlyeq\rangle$ geordnet und sei $f:N\to M$.
f ist genau dann konvex, wenn die Urbilder konvexer Mengen aus $\langle M,\leq\rangle$ unter f konvex sind in $\langle N,\leq\rangle$.

Wegen 2.3.21 sind Homomorphismen und Anti-Homomorphismen zwischen geordneten Mengen auch konvex, d.h. konvexe Abbildungen verallgemeinern den Begriff der Ordnungshomomorphie.

Quasi-isotone Abbildungen (vgl. 2.3.1) kann man wie folgt charakterisieren

Satz 2.3.25

Sei $P:\mathbb{F}\longrightarrow\mathbb{F}_1$, wobei $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}_1\subset\mathbb{I}\,\mathbb{F}(M,\mathbb{I})$ ist, und seien $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}_1$ mit der Ordnung für I-Funktionen versehen.
Dann ist P genau dann quasi-isoton, wenn für alle $F,G\in\mathbb{F}$ mit $F\leq G$ und $PF\neq PG$ ein Anfang A und ein Ende E von $\langle\mathbb{F}_1,\leq\rangle$ existieren mit $PF\in A$, $PG\in E$ und $A\cap E=\emptyset$.

Bemerkung 2.3.26

Sei $\langle N,\leq\rangle$ geordnet, und sei $\varphi: N \to N$ ein Ordnungshomomorphismus von N. Dann heißt φ ein Hüllenoperator von $\langle N,\leq\rangle$, wenn gilt:
(1) φ ist idempotent und (2) für alle $n \in N$ ist $n \leq \varphi(n)$ (vgl. [28]).
Es besteht dann folgender Zusammenhang zwischen Hüllenoperatoren und bzgl. $\mathfrak{T}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ besten Approximationen für $\mathbb{F}$:
Sei $P: \mathbb{F} \to \mathbb{F}_1$ mit $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}$. Dann gilt:
Falls P beste Approximation für $\mathbb{F}$ ist bzgl. $\mathfrak{T}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$, dann ist P Hüllenoperator von $\langle \mathbb{F},\leq\rangle$.
Falls P Hüllenoperator von $\langle \mathbb{F},\leq\rangle$ ist, dann ist P beste Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathfrak{T}(\mathbb{F}, P(\mathbb{F}))$.

Bemerkung 2.3.27

Es besteht ein Zusammenhang zwischen dem in 2.2 bzw. in 2.3 entwickelten Optimalitätsbegriff für einschließende Approximationen von Intervall-Funktionen und der Theorie der monotonen Rundungen.
In [8] definiert Kulisch 'Rundung' als Approximation einer geordneten Menge $\langle N,\leq\rangle$ durch eine geeignete Teilmenge M von N. Dabei heißt geeignet, daß die Menge M, mit der approximiert wird, ein sogenannter (unterer, oberer) Raster ist. Der Begriff des Rasters ist wie folgt definiert (vgl. [8]):
Sei $\langle N,\leq\rangle$ geordnet und sei $M \subset N$. Für $x \in N$ wird mit $\{x\}^+$ ($\{x\}^*$) die Menge aller unteren (oberen) Schranken von x in N bezeichnet (vgl. auch 2.3.18).
Dann heißt M unterer (oberer) Raster von $\langle N,\leq\rangle$, falls für alle $x \in N$ gilt:
(1) $\{x\}^+ \cap M \neq \emptyset$ ($\{x\}^* \cap M \neq \emptyset$) und (2) $\{x\}^+ \cap M$ ($\{x\}^* \cap M$) besitzt ein größtes (kleinstes) Element.
M heißt Raster, falls M oberer und unterer Raster ist.

Sei $\langle N,\leq\rangle$ geordnet, und sei $R: N \to S$, wobei $S \subset N$ ist. Dann heißt R Rundung von N in S, falls $R(s) = s$ ist für alle $s \in S$ (vgl. [9]).
Die Rundung R heißt monoton, falls für $x,y \in N$ mit $x \leq y$ $R(x) \leq R(y)$ folgt.
Die Rundung R heißt nach unten (oben) gerichtet, falls für alle $s \in S$ $R(s) \leq s$ ($s \leq R(s)$) gilt.
Zwischen Rastern und monotonen, gerichteten Rundungen besteht dann der folgende Zusammenhang:
Sei $\langle N,\leq\rangle$ geordnet und sei $S \subset N$. Dann gilt:
(1) Es gibt höchstens eine monotone, nach unten (oben) gerichtete Rundung R von N auf S.
(2) Falls $R: N \to S$ eine monotone, nach unten (oben) gerichtete Rundung von N auf S ist, dann ist S ein unterer (oberer) Raster von N.
(3) Falls S ein unterer (oberer) Raster von N ist, dann gibt es genau eine

monotone, nach unten (oben) gerichtete Rundung R von N in S. Diese ist dann gegeben durch $n \mapsto \sup(\{n\}^+ \cap S)$ $(n \to \inf(\{n\}^* \cap S))$ (vgl. auch [8]).

In [2] hat Apostolatos den Begriff des (unteren, oberen) Rasters verallgemeinert. Statt die Existenz des größten (kleinsten) Elements für die Mengen $\{x\}^+ \cap M$ ($[x\}^* \cap M$) zu fordern, verlangt er lediglich die Existenz eines maximalen (minimalen) Elements von $\{x\}^+ \cap M$ ($\{x\}^* \cap M$).
Ersetzt man die Monotonie durch die Quasi-Monotonie (vgl. 2.3.1), so kann man zwischen quasi-monotonen, gerichteten Rundungen und dem Rasterbegriff von Apostolatos analoge Aussagen wie zwischen monotonen, gerichteten Rundungen und dem Rasterbegriff von Kulisch erhalten.

2.4 Berechenbare Approximationen, Optimalität

In [24] wird eine andere Möglichkeit diskutiert, für einschließende Approximationen $P: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}_1$ einen Optimalitätsbegriff zu definieren.
Für vorgebenes $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{I}\mathbb{F}(M, \mathbb{I})$ kennt man i.a. nicht die Klasse $\mathcal{OL}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ aller Approximationen $P: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}_1$ für $\mathbb{F}$, sondern lediglich einige solcher Einschließungen P, die man auch explizit angeben kann. Es ist daher naheliegend, statt der Klasse aller möglichen Einschließungen für $\mathbb{F}$ nur solche Approximationen zu betrachten, die man praktisch konstruieren kann. Dabei soll'konstruieren'bedeuten, daß man mittels gewisser Informationen über die zu approximierende Klasse $\mathbb{F}$, welche durch Abbildungen $W_i: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{I}$ gegeben sind (i = 1,..,n), die Approximation für jedes $F \in \mathbb{F}$ explizit angeben kann.

Definition 2.4.1 (vgl. [24])
Seien $\mathbb{F}, \mathbb{F}_1 \subset \mathbb{I}\mathbb{F}(M, \mathbb{I})$, $M \subset \mathbb{R}$, und sei $P: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}_1$ eine einschließende Approximation für $\mathbb{F}$. Weiter seien $W_i: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{I}$ für i = 1,..,n (die W_i vermitteln gewisse Informationen über $\mathbb{F}$).
Die Approximation P heißt berechenbar mittels $W_1,..,W_n$, falls eine Abbildung $\overline{P}: \mathcal{K} \times M \longrightarrow \mathbb{I}$ existiert, wobei $\mathcal{K} \subset \mathbb{I}^n$ ist mit $(W_1(F),..,W_n(F)) \in \mathcal{K}$ für alle $F \in \mathbb{F}$, so daß für alle $F \in \mathbb{F}$ und für alle $x \in M$ gilt

$$PF(x) = \overline{P}(W_1(F),..,W_n(F),x) \ .$$

Beispiel 2.4.2 (vgl. [24])
Sei $M \in \mathbb{I}$ und sei $x_o \in M$ fest. Mit $\mathbb{F}$ werde die Menge der stetigen, stetig differenzierbaren I-Funktionen $F: M \longrightarrow \mathbb{I}$ bezeichnet (zur Definition der Differenzierbarkeit von I-Funktionen vgl. [24] bzw. § 3 der vorliegenden Arbeit).
Dann wird durch

$$T^1F(x) = F(x_o) + (x-x_o)F'(M), \ x \in M \text{ und } F'(M) = \bigcup_M F'(x) \in \mathbb{I},$$

eine einschließende Approximation $T^1: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ definiert.
Seien $W_o, W_1: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{I}$ definiert durch $W_o(F) = F(x_o)$ und $W_1(F) = F'(M) \in \mathbb{I}$.
Dann ist T^1 berechenbar bzgl. W_o und W_1.
Denn die I-Funktion $T^1: \mathbb{I}^2 \times M \longrightarrow \mathbb{I}$ mit $(V_o, V_1, x) \mapsto V_o + (x-x_o)V_1$
hat die Eigenschaft $T^1F(x) = \overline{T}^1(W_o(F), W_1(F), x)$ für jedes $F \in \mathbb{F}$ und für alle $x \in M$.

Beispiel 2.4.3 (vgl. [24])
Sei $M \in \mathbb{I}$, $x_o \in M$ fest, und sei $\mathbb{F}$ die Menge der stetigen, stetig differen-

zierbaren I-Funktionen $F:M \longrightarrow \mathbb{I}$ mit $F(x) \supset F(y)$ für alle $x,y \in M$ mit $y < x \leq x_o$ bzw. mit $x_o \leq x < y$.
Dann wird durch

$$P^1F(x) = F(x_o) \dot{+} (x-x_o) \cap F', \quad x \in M,$$

eine einschließende Approximation $P^1: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ definiert. Dabei steht $\cap F'$ abkürzend für $\bigcap_M F'(x) \in \mathbb{I}$. Zur Definition von $\dot{+}$ vgl. § 1.2.
Seien W_o, $W_2: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{I}$ mit $W_o(F) = F(x_o)$ und $W_2(F) = \cap F'$.
Weiter sei $\mathcal{K}$ jene Teilmenge von $\mathbb{I}^2$, für deren Elemente (A,B) gilt $\lambda A \geq \max_M |x-x_o| \lambda B$ und $\bar{P}^1: \mathcal{K} \times M \longrightarrow \mathbb{I}$ mit $(V_o,V_1,x) \mapsto V_o \dot{+} (x-x_o)V_1$.
Dann ist P^1 berechenbar mittels W_o, W_2, denn für jedes $F \in \mathbb{F}$ gilt $P^1F(x) = \bar{P}^1(W_o(F), W_2(F), x)$ für alle $x \in M$.

Man bezeichnet die Abbildungen W_i aus 2.4.1 auch als Wertzuweisungen bzw. kurz als Werte.
In Analogie zu $\mathcal{A}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ werde für gegebenes $\mathbb{F}$ die Menge aller bzgl. $W_o,..,W_n: \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{I}$ berechenbaren Approximationen für $\mathbb{F}$ mit $\mathcal{A}(\mathbb{F},W_1,..,W_n)$ bezeichnet.
Da man keinen festen Bildbereich hat, kann man Optimalität für $\mathcal{A}(\mathbb{F},W_1,..,W_n)$ nicht wie für $\mathcal{A}(\mathbb{F},\mathbb{F}_1)$ definieren.

Definition 2.4.4 (vgl. [21])
Sei $\mathbb{F} \subset \mathbb{I}\mathbb{F}(M,\mathbb{I})$, $M \subset \mathbb{R}$, und sei $P \in \mathcal{A}(\mathbb{F},W_1,..,W_n)$, wobei die W_i Abbildungen von $\mathbb{F}$ in $\mathbb{I}$ sind. Dann heißt P

(1) beste Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{A}(\mathbb{F},W_1,..,W_n)$, wenn für alle $Q \in \mathcal{A}(\mathbb{F},W_1,..,W_n)$ $PF \leq QF$ gilt für alle $F \in \mathbb{F}$,

(2) optimale Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{A}(\mathbb{F},W_1,..,W_n)$, wenn für alle $Q \in \mathcal{A}(\mathbb{F},W_1,..,W_n)$ gilt: Falls für ein $F \in \mathbb{F}$ $QF \leq PF$ ist, dann folgt $QF = PF$.

In Analogie zu 2.2.9 gilt dann: Die Einschließung $P \in \mathcal{A}(\mathbb{F},W_1,..,W_n)$ ist genau dann beste Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{A}(\mathbb{F},W_1,..,W_n)$, wenn P kleinstes Element der geordneten Menge $\langle \mathcal{A}(\mathbb{F},W_1,..,W_n), \subseteq \rangle$ ist.
Für optimale Approximationen gilt: Falls $P \in \mathcal{A}(\mathbb{F},W_1,..,W_n)$ optimal bzgl. $\mathcal{A}(\mathbb{F},W_1,..,W_n)$ ist, dann ist P minimales Element von $\langle \mathcal{A}(\mathbb{F},W_1,..,W_n), \subseteq \rangle$. Die Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch i.a. nicht mehr. Denn zu einem minimalen Element P von $\mathcal{A}(\mathbb{F},W_1,..,W_n)$ kann es z.B. ein $Q \in \mathcal{A}(\mathbb{F},W_1,..,W_n)$ geben, das mit P nicht vergleichbar ist bzgl. $\leq$, und für das ein $F \in \mathbb{F}$ existiert mit $QF < PF$.

Für berechenbare Approximationen gilt das folgende hinreichende Optimalitätskriterium

Satz 2.4.5 (vgl. [21])

Für $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, W_1, .., W_n)$, $\mathbb{F} \subset \mathbb{I}\mathbb{F}(M, \mathbb{I})$ und $M \subset \mathbb{R}$, gelte $P(\mathbb{F}) \subset \mathbb{F}$ und $W_i(F) = W_i(PF)$ für alle $F \in \mathbb{F}$ und $i = 1, .., n$.
Dann ist P beste Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F}, W_1, .., W_n)$.

Beispiel 2.4.6 (vgl. [21])

Wir betrachten noch einmal Beispiel 2.4.2. Dann ist die berechenbare Approximation T^1 eine Abbildung von $\mathbb{F}$ in sich, denn für $F \in \mathbb{F}$ ist T^1F mit $T^1F(x) = F(x_o) + (x-x_o)F'(M)$ stetig differenzierbar in M.
Man bestätigt nun auch, daß $W_o(F) = W_o(T^1F)$ und $W_1(F) = W_1(T^1F)$ für alle $F \in \mathbb{F}$ erfüllt ist.
Wegen 2.4.5 ist T^1 daher beste Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F}, W_o, W_1)$.

Beispiel 2.4.7 (vgl. [21])

Auch die in 2.4.3 konstruierte Approximation P^1 ist beste Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F}, W_o, W_2)$. Denn P^1 bildet die Klasse $\mathbb{F}$ aus 2.4.3 in sich ab, und es gilt für alle $F \in \mathbb{F}$ und für $i = o, 2$ $W_i(F) = W_i(P^1F)$.

Sei $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, W_1, .., W_n)$ beste Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F}, W_1, .., W_n)$. Dann stellt sich die Frage, ob man P durch gewisse Eigenschaften charakterisieren kann, ähnlich wie dies für bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ beste Approximationen möglich ist, vgl. 2.3.
Wir stellen zunächst fest, daß bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F}, W_1, .., W_n)$ beste Approximationen i.a. nicht isoton von $\mathbb{F}$ in $\mathbb{I}\mathbb{F}(M, \mathbb{I})$ sind.

Beispiel 2.4.8

Wir betrachten nochmals das Beispiel 2.4.2, wobei jetzt speziell $M = [o,1]$ sei und $x_o = o$.
Dann ist die bzgl. W_o, W_1 berechenbare Approximation T^1 beste Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F}, W_o, W_1)$, vgl. 2.4.6.
T^1 ist jedoch nicht isoton. Denn seien $F, G \in \mathbb{F}$ definiert durch $F(x) = [-1,1]x$, $G(x) = [-1,1]x^2$, $x \in M$. Dann gilt $G \leq F$. Weiter ist $T^1F = F$ und $T^1G(x) = [-1,1]2x$. Also gilt $T^1F \not\leq T^1G$, und T^1 ist nicht quasi-isoton, also erst recht nicht isoton.

Anders dagegen verhält es sich mit der Idempotenz. Sei P eine bzgl.

$\mathcal{O}(\mathbb{F},W_1,..,W_n)$ beste Approximation für $\mathbb{F}$. Weiter gelte $P(\mathbb{F}) \subset \mathbb{F}$. Faßt man dann P als Abbildung von $\mathbb{F}$ auf $P(\mathbb{F})$ auf, so kann man unter zusätzlichen Bedingungen $P|P(\mathbb{F}) = id_{P(\mathbb{F})}$ zeigen.

Satz 2.4.9

Sei $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F},W_1,..,W_n)$ mit $P(\mathbb{F}) \subset \mathbb{F}$, und es gelte $W_i(F) = W_i(PF)$ für alle $F \in \mathbb{F}$ und für $i = 1,..,n$ (wegen 2.4.5 ist dann P beste Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F},W_1,..,W_n)$). Faßt man P als Abbildung von $\mathbb{F}$ auf die Bildmenge $P(\mathbb{F}) = \mathbb{F}_1$ auf, so gilt $P|\mathbb{F}_1 = id_{\mathbb{F}_1}$.

Beweis. Es wird zunächst gezeigt, daß P idempotent ist.
Sei $F \in \mathbb{F}$ beliebig. P ist berechenbar bzgl. $W_1,..,W_n$. Also existiert eine Teilmenge $\mathcal{M}$ von $\mathbb{I}^n$ und eine Abbildung $\bar{P}: \mathcal{M} \times M \to \mathbb{I}$, so daß für alle $F \in \mathbb{F}$ $PF(x) = \bar{P}(W_1(F),..,W_n(F),x)$ ist für alle $x \in M$. Dann folgt aber $P^2F(x) = \bar{P}(W_1(PF),..,W_n(PF),x)$ für alle $x \in M$. Wegen $W_i(PF) = W_i(F)$ für $i = 1,..,n$ folgt daraus $P^2F(x) = \bar{P}(W_1(F),..,W_n(F),x) = PF(x)$ für alle $x \in M$. Also gilt $P^2F = F$. $F \in \mathbb{F}$ war beliebig, also ist $P = P^2$.
Nach Definition von $\mathbb{F}_1$ ist P surjektiv. Zusammen mit der Idempotenz folgt daraus dann die Behauptung.

Folgerung 2.4.10

Unter den Voraussetzungen von 2.4.9 gilt: Die Approximation $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F},\mathbb{F}_1)$ (dabei ist $\mathbb{F}_1 = P(\mathbb{F})$) ist genau dann beste Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F},\mathbb{F}_1)$, wenn P isoton ist.

Bemerkung 2.4.11

Sei $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F},W_1,..,W_n)$. Für den Fall, daß P die Menge $\mathbb{F}$ nicht in sich abbildet, sind keine Optimalitätskriterien bekannt. Insbesondere kann man auch keine zu 2.3.12 analogen Aussagen erwarten. Denn Approximationen, die optimal sind für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F},W_1,..,W_n)$, brauchen für Teilklassen von $\mathbb{F}$ nicht mehr optimal zu sein, vgl. [21].

Seien $\mathbb{F}, \mathbb{F}_1 \subset \mathbb{I}\mathbb{F}(M,\mathbb{I})$, $M \subset \mathbb{R}$, und seien $W_i: \mathbb{F} \to \mathbb{I}$ für $i = 1,..,n$. Dann gilt i.a. $\mathcal{O}(\mathbb{F},\mathbb{F}_1) \neq \mathcal{O}(\mathbb{F},W_1,..,W_n)$. Denn einerseits bildet nicht jede bzgl. $W_1,..,W_n$ berechenbare Approximation in $\mathbb{F}_1$ ab, und andererseits wird nicht jede Approximation $P: \mathbb{F} \to \mathbb{F}_1$ berechenbar sein bzgl. $W_1,..,W_n$.
Falls $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F},W_1,..,W_n) \cap \mathcal{O}(\mathbb{F},\mathbb{F}_1)$ beste (optimale) Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F},W_1,..,W_n)$ ist, so braucht P nicht beste (optimale) Approxi-

mation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ zu sein. Denn z.B. die Approximation T^1 aus Beispiel 2.4.2 ist beste berechenbare Approximation, jedoch nicht beste Approximation im Sinne von Definition 2.2.2, da sie nicht isoton ist. Falls umgekehrt $P \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1) \cap \mathcal{O}(\mathbb{F}, W_1, .., W_n)$ beste Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ ist, so braucht P nicht beste Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F}, W_1, .., W_n)$ zu sein, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 2.4.12

Betrachte noch einmal Beispiel 2.4.3. Die in 2.4.3 konstruierte Approximation $P^1: \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ ist berechenbar bzgl. der Werte $W_o, W_2: \mathbb{F} \to \mathbb{I}$ mit $W_o(F) = F(x_o)$ und $W_2(F) = \bigcap F'$ (Einzelheiten vgl. 2.4.3).

Sei weiter $\mathbb{F}_1$ die Klasse aller auf M konstanten I-Funktionen, und sei $Q: \mathbb{F} \to \mathbb{F}_1$ mit $F \mapsto QF$ und $QF(x) = F(x_o)$ für alle $x \in M$. Dann gilt $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}$ und $Q \in \mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1) \cap \mathcal{O}(\mathbb{F}, W_o, W_2)$. Weiter ist Q beste Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$, Q ist aber nicht beste Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F}, W_o, W_2)$, denn es gilt $P^1 \sqsubseteq Q$ und $P^1 \neq Q$.

Für das Arbeiten in der Praxis ist der von Ratschek in [24] definierte Optimalitätsbegriff günstiger. Denn für vorgegebene Klassen von I-Funktionen $\mathbb{F}, \mathbb{F}_1 \subset \mathbb{I}\mathbb{F}(M, \mathbb{I})$ existiert häufig keine bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F}, \mathbb{F}_1)$ beste Approximation bzw. ist es nicht möglich, eine beste Approximation anzugeben. Dagegen findet man noch häufig eine beste berechenbare Approximation für $\mathbb{F}$.

Beispiel 2.4.13

Sei $M = [0,1]$, $x_o = 0$, und sei $C^1(M, \mathbb{I})$ die Klasse der auf M stetig differenzierbaren I-Funktionen $F: M \to \mathbb{I}$ (zur Definition der Differenzierbarkeit vgl. § 3 bzw. § 5). Weiter sei $\mathbb{P}^1_{x_o}(M, \mathbb{I})$ die Menge aller I-Polynome 1-ten Grades um x_o $P: M \to \mathbb{I}$. Es ist $\mathbb{P}^1_{x_o} \subset C^1$. Dann ist die Approximation $T^1: C^1 \to C^1$, die für $F \in C^1$ definiert ist durch $T^1F(x) = F(x_o) + (x - x_o)F'(M)$, $x \in M$, berechenbar bzgl. der Werte $W_o, W_1: C^1 \to \mathbb{I}$ mit $W_o(F) = F(x_o)$ und $W_1(F) = F'(M)$ (vgl. Beispiel 2.4.2). T^1 ist beste Approximation für C^1 bzgl. $\mathcal{O}(C^1, W_o, W_1)$ (vgl. Beispiel 2.4.6).
Es gilt weiter $T^1(C^1) = \mathbb{P}^1_{x_o}$.
Es soll gezeigt werden, daß es keine bzgl. $\mathcal{O}(C^1, \mathbb{P}^1_{x_o})$ beste Approximation für C^1 gibt. Dies geschieht mit Hilfe von 2.3.17.
Seien $F, G \in \mathbb{P}^1_{x_o}$ wie folgt definiert: $F(x) = [-1,1]x$, $G(x) = [-1,1] + (-2)x$, $x \in M$. Für die Teilmenge $K = \{F, G\}$ von $\mathbb{P}^1_{x_o}$ gilt dann $K^+ \neq \emptyset$, denn z.B. die I-Funktion $H \in C^1$ mit $H(x) = [-x, -x^2]$, $x \in M$, ist aus K^+.
Man erkennt aus der Konstruktion von F und G weiter, daß $K^+ \cap \mathbb{P}^1_{x_o} = \{R\}$ ist

mit $R(x) = (-1)x$, $x \in M$, denn I-Polynome werden mit zunehmender Entfernung vom Entwicklungspunkt x_o breiter. Also folgt $K^+ \cap \Phi(H) = \emptyset$. Wegen 2.3.17 kann es daher keine bzgl. $\mathfrak{A}(C^1, \mathbb{P}_n^1)$ beste Approximation für C^1 geben.

Bemerkung 2.4.14

In [25] untersucht Schmitgen mit Methoden der Tschebyscheff-Approximation folgende Fragestellung: Zu einer gegebenen I-Funktion $F:M \to \mathbb{I}$, $M \subset \mathbb{R}$, ist ein I-Polynom $P:M \to \mathbb{I}$ gesucht, welches F auf M einschließt, und für das $|||P - F||| = \inf_{W(F)} |||Q - F|||$ gilt. Dabei ist $|||\cdot|||$ eine I-Funktionen-Norm, W(F) eine Menge von I-Polynomen, deren Elemente F auf M einschließen, und $P \in W(F)$.

Im Sinne von Schmitgen optimale Einschließungen sind i.a. nicht optimal bzgl. der von der Inklusion induzierten Ordnung. Auch ist die Approximation mit I-Polynomen nicht immer sinnvoll, vgl. § 4 und § 8 der vorliegenden Arbeit. Die von Schmitgen in [25] erzielten Ergebnisse lassen sich in der Praxis nur schwer bzw. überhaupt nicht anwenden. So ist z.B. die Konstruktion von optimalen Einschließungen für gegebenes F, außer in einigen Spezialfällen, nicht möglich. Auch die Frage nach der Eindeutigkeit von optimalen Approximationen ist nur selten zu beantworten.

Aus diesen Gründen sollen die von Schmitgen in [25] entwickelten Ideen nicht weiter verfolgt werden.

Bemerkung 2.4.15

Ein Konzept, das mit den in § 2 erwähnten Begriffsbildungen eine gewisse Ähnlichkeit aufweist, findet sich in Traub-Woźniakowski [30]. Dort wird eine Theorie des optimalen Algorithmus entwickelt, bei der auch die Abhängigkeit von einer vorgegebenen Information und die arithmetisch-mathematische Struktur der Abhängigkeit und der Information eine wesentliche Rolle spielen. Der Unterschied zu unseren Untersuchungen liegt darin, daß wir optimale Einschließungen der Lösung gewinnen wollen, während in [30] Algorithmen gesucht werden, die mit möglichst geringem (optimalem!) Aufwand Approximationen liefern, die eine vorgegebene Abweichung von der exakten Lösung nicht überschreiten.

3 Differenzierbarkeit von Intervall-Funktionen, der Mittelwertsatz für Intervall-Funktionen, Optimalität der Mittelwertsatz-Approximation

3.1 Überblick

Wie üblich werde mit $\mathbb{I}$ die Menge der reellen kompakten Intervalle bezeichnet.

In dieser Arbeit sollen einschließende Mittelwert- und Taylor-Sätze für Intervall-Funktionen $F: M \to \mathbb{I}$, wobei M eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, hergeleitet werden. (Intervall-Funktionen werden im folgenden wieder kurz I-Funktionen genannt.) Zur Bildung dieser Sätze wird naturgemäß ein Ableitungsbegriff für I-Funktionen reellen Arguments benötigt. Aus der Literatur sind mehrere Möglichkeiten zur Definition eines solchen Ableitungsbegriffs bekannt. In diesem Zusammenhang sei insbesondere auf die Arbeit [24] von Ratschek und Schröder verwiesen, in der verschiedene Ableitungsbegriffe für I-Funktionen untersucht werden. Hier findet sich auch eine umfassende Literaturübersicht über die zu diesem Thema schon erschienenen Arbeiten.

In [21] verwendet Ratschek zur Herleitung von einschließenden Mittelwertsätzen von I-Funktionen die vereinfachte Version eines Ableitungsbegriffs aus [24], wobei die Ableitung als Umkehroperation der Integration von I-Funktionen definiert ist.

Einen anderen Weg hat Markov in [11] beschritten. Er definiert Differenzierbarkeit für I-Funktionen formal genauso wie im Reellen, wobei im Zähler des Differenzenquotienten statt der Differenz aus $\mathbb{R}$ die Markov-Differenz steht (vergl. § 1.3). Diese Definition von Markov soll dem folgenden Teil dieser Arbeit zugrunde liegen.

In § 3.2 werden die wichtigsten Ergebnisse von Markov kurz wiedergegeben.

In 3.3 wird für I-Funktionen F die punktweise Differenzierbarkeit mit Hilfe der Randfunktionen von F beschrieben. Dadurch ist es möglich, die Differenzierbarkeit von I-Funktionen auf einem Intervall vollständig durch die zugehörigen Randfunktionen zu charakterisieren (vergl. 3.3.8 und 3.3.11).

In § 3.4 werden einige Rechenregeln für differenzierbare I-Funktionen abgeleitet.

In § 3.5 wird der Mittelwertsatz für I-Funktionen bewiesen. Der Mittelwertsatz liefert eine einschließende Approximation T^1 für die Klasse $C^1(M,\mathbb{I})$ der stetig differenzierbaren I-Funktionen $F: M \to \mathbb{I}$. Es wird gezeigt, daß T^1 beste berechenbare Approximation für $C^1(M,\mathbb{I})$ ist.

3.2 Differenzierbarkeit von Intervall-Funktionen

Mit Hilfe der Markov-Differenz (vergl. § 1.3) kann man Differenzierbarkeit für I-Funktionen formal genauso definieren wie für reellwertige Abbildungen.

Definition 3.2.1 (vergl. [11])
Sei M ein offenes Intervall von $\mathbb{R}$, und sei $F: M \longrightarrow \mathbb{I}$. F heißt differenzierbar in $x_o \in M$, falls der folgende Grenzwert existiert

$$\lim_{x \to x_o} \frac{F(x) \ominus F(x_o)}{x - x_o}, \quad x \in M \text{ und } x \neq x_o. \tag{1}$$

F heißt rechtsseitig (linksseitig) differenzierbar in $x_o \in M$, falls der einseitige Grenzwert

$$\lim_{x > x_o} \frac{F(x) \ominus F(x_o)}{x - x_o}, \quad x \in M \text{ und } x > x_o \ (x < x_o) \tag{2}$$

existiert. Existiert einer der Grenzwerte (1) oder (2), so ist er eindeutig bestimmt und wird mit $F'(x_o)$ bzw. $F'_+(x_o)$ bzw. $F'_-(x_o)$ bezeichnet.

Die I-Funktion $F: M \longrightarrow \mathbb{I}$ heißt differenzierbar im Intervall M (nicht mehr unbedingt offen!), falls F differenzierbar ist in allen $x \in \mathring{M}$ und für die Randpunkte von M (falls vorhanden) die entsprechenden einseitigen Grenzwerte (2) existieren. In diesem Fall wird die Abbildung, die jedem $x \in M$ den Wert $F'(x)$ zuordnet, als Ableitungsfunktion F' von F bezeichnet.
F heißt stetig differenzierbar im Intervall M, falls F differenzierbar ist in M, die Ableitungsfunktion F' stetig ist in $\mathring{M}$ und für die Randpunkte a von M (falls vorhanden) der Grenzwert $\lim_{x \to a} F'(x)$, $x \in M$, existiert und gleich dem Wert der entsprechenden einseitigen Ableitung von F in a ist. Die Menge der stetig differenzierbaren I-Funktionen $F: M \longrightarrow \mathbb{I}$, wobei M ein Intervall aus $\mathbb{R}$ ist, wird mit $C^1(M, \mathbb{I})$ bezeichnet. Ist aus dem Zusammenhang heraus klar, welches Intervall M zugrunde liegt, so schreibt man kurz C^1.

Bemerkung 3.2.2
Man kann die Klasse $\mathbb{F}(M,\mathbb{R})$ der reellen Abbildungen $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ als Teilraum des quasilinearen Raums $\mathbb{I}\mathbb{F}(M,\mathbb{I})$ der I-Funktionen $F: M \longrightarrow \mathbb{I}$ auffassen (vgl. 1.2.4), indem man die Abbildungen $f \in \mathbb{F}(M,\mathbb{R})$ mit den I-Funktionen $F = [f,f] = \underline{f}$ identifiziert.
Dann ist die I-Funktion $\underline{f}$ differenzierbar im Sinne von 3.2.1 genau dann, wenn die zugehörige reelle Funktion f im gewöhnlichen Sinne differenzierbar ist. Insbesondere kann man also die Klasse $C^1(M, \mathbb{R})$ der reellwertigen,

stetig differenzierbaren Abbildungen als Teilmenge von $C^1(M, \mathbb{I})$ auffassen.

Beispiel 3.2.3

Wir betrachten die Einschränkung $\vee$ des S-Operators $\vee$ auf $\mathbb{R}$, vergl. § 1.4. Für festes $a \in \mathbb{R}$ wird durch die Zuordnung $b \mapsto a \vee b$ eine Abbildung $\vee_a : \mathbb{R} \to \mathbb{I}$ definiert. Wir wollen zeigen, daß $\vee_a$ stetig differenzierbar ist auf $\mathbb{R}$ und daß für alle $x \in \mathbb{R}$ $\vee_a'(x) = [0,1]$ ist.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hinreichend klein, dann gilt

$$\frac{\vee_a(x_0+h) \ominus \vee_a(x_0)}{h} = \frac{((x_0+h) \vee a) \ominus (x_0 \vee a)}{h} = \frac{h \vee 0}{h} = [0,1].$$

Also existiert $\vee_a'(x_0)$ und ist gleich $[0,1]$.

Beispiel 3.2.4

Sei $F: \mathbb{R} \to \mathbb{I}$ ein Intervall-Polynom 1-ten Grades mit Entwicklungspunkt x_0, d.h. F ist von der Form $F(x) = A_0 + (x-x_0)A_1$ mit $A_0, A_1 \in \mathbb{I}$, $x \in \mathbb{R}$. Dann ist F auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt $F'(x) = A_1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Denn für $x = x_0$ erhält man wegen $(A+B) \ominus A = B$ für alle $A, B \in \mathbb{I}$

$$\frac{F(x_0+h) \ominus F(x_0)}{h} = \frac{(A_0 + hA_1) \ominus A_0}{h} = \frac{hA_1}{h} = A_1, \quad h \in \mathbb{R} \text{ und } h \neq 0.$$

Also existiert $F'(x_0)$ und ist gleich A_1.
Für $x \neq x_0$ und $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hinreichend klein erhält man wegen der folgenden Identität $(A+B) \ominus (A+C) = (B \ominus C)$ für alle $A, B, C \in \mathbb{I}$ (vgl. 1.3.5)

$$\frac{F(x+h) \ominus F(x)}{h} = \frac{(A_0 + (x+h-x_0)A_1) \ominus (A_0 + (x-x_0)A_1)}{h} = \frac{hA_1}{h} = A_1$$

Zur Herleitung der vorletzten Gleichheit benötigt man noch folgende Identität: Für $A \in \mathbb{I}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{sign}(x) = \operatorname{sign}(y)$ ist $xA \ominus yA = (x-y)A$.
Also ist F in ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $F'(x) = A_1$.

Von nun an werde mit M stets eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}$ bezeichnet.
Genauso wie im Reellen gilt der

Satz 3.2.5

Sei $F: M \to \mathbb{I}$ und $x_0 \in M$. Dann gilt

(1) Falls F differenzierbar ist in x_0, dann ist F auch stetig in x_0.

(2) Falls $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ ist, so existiert $F'(x_0)$ genau dann, wenn die einseitigen Ableitungen $F'_+(x_0)$ und $F'_-(x_0)$ existieren und gleich sind.

Man beweist Satz 3.2.5 formal genauso wie im Reellen.

Ähnlich wie bei stetigen I-Funktionen besteht auch bei differenzierbaren I-Funktionen F ein gewisser Zusammenhang zwischen F und den zugehörigen Randfunktionen.

Satz 3.2.6

Seien $f,g: M \to \mathbb{R}$ reelle Abbildungen, die beide differenzierbar sind in $x_o \in M$. Dann ist die durch $F = f \vee g$ definierte I-Funktion $F: M \to \mathbb{I}$ differenzierbar in x_o, und es gilt

(3) $\quad F'(x_o) = (f \vee g)'(x_o) = f'(x_o) \vee g'(x_o)$.

Beweis. Sei $x_o \in M$ beliebig und sei etwa $f(x_o) < g(x_o)$. Wegen der Stetigkeit von f und g in x_o existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in U_\delta(x_o) \cap M$ $f(x) < g(x)$ gilt. Nach Definition der M-Differenz erhält man daher für alle $x \in U_\delta(x_o) \cap M$

$$\frac{F(x) \ominus F(x_o)}{x - x_o} = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} \vee \frac{g(x) - g(x_o)}{x - x_o}$$

Da f und g differenzierbar sind in x_o, existieren die Grenzwerte der Differenzenquotienten von f und g, und wegen der Stetigkeit des S-Operators folgt daraus die Existenz von $F'(x_o)$ und die Gültigkeit von (3).

Folgerung 3.2.7 (vergl. [11])

Sei $F = [f,g]: M \to \mathbb{I}$, und seien die Randfunktionen f und g differenzierbar in $x_o \in M$. Dann ist F differenzierbar in x_o, und es gilt die Formel (3) aus Satz 3.2.6.

3.2.7 läßt sich ohne zusätzliche Voraussetzungen nicht umkehren, d.h. aus der Differenzierbarkeit einer I-Funktion $F = [f,g]$ in $x_o \in M$ folgt i.a. nicht die Differenzierbarkeit der Randfunktionen f und g in x_o; f und g brauchen noch nicht einmal einseitige Ableitungen in x_o zu besitzen, vergl. [27].

Es gilt (zur Definition des λ-Funktionals vgl. § 1.2):

Satz 3.2.8 (vergl. [11])

Sei $F = [f,g]: M \to \mathbb{I}$ differenzierbar in $x_o \in \mathring{M}$, und sei die reelle Abbildung $\lambda F: M \to \mathbb{R}$, definiert durch $(\lambda F)(x) = \lambda(F(x))$, $x \in M$, monoton in einer Umgebung von x_o. Dann existieren die Ableitungen $f'(x_o)$ und $g'(x_o)$, und es gilt

$$F'(x_o) = \begin{cases} [f'(x_o), g'(x_o)] & \text{, falls } \lambda F \text{ monoton steigt} \\ [g'(x_o), f'(x_o)] & \text{, falls } \lambda F \text{ monoton fällt.} \end{cases}$$

Insbesondere folgt also aus der Differenzierbarkeit von F in M die Differenzierbarkeit von f und g in M, falls λF monoton auf M ist.
Falls $x_o \in M$ Randpunkt von M ist, so gilt eine analoge Aussage über die Existenz der entsprechenden einseitigen Ableitungen von f und g in x_o.

Beispiel 3.2.9

Sei $F: \mathbb{R} \to \mathbb{I}$ ein I-Polynom 1-ten Grades um x_o (vgl. 3.2.4). Dann ist λF fallend in $(-\infty, x_o]$ und steigend in $[x_o, +\infty)$. Somit gilt nach 3.2.8 für die Randfunktionen f und g von F: f und g sind (reell) differenzierbar in $(-\infty, x_o]$ und $[x_o, +\infty)$, und es gilt $F'(x) = [g'(x), f'(x)]$ für $x < x_o$ sowie $F'(x) = [f'(x), g'(x)]$ für $x_o < x$.
Für $x = x_o$ existieren noch die einseitigen Ableitungen von f und g, und es gilt $g'_+(x_o) = f'_-(x_o)$, $g'_-(x_o) = f'_+(x_o)$.

Genauso wie im Reellen gilt der

Satz 3.2.1o

Sei $F: M \to \mathbb{I}$ und sei $x_o \in M$. Dann ist F genau dann differenzierbar in x_o, wenn für jede gegen x_o konvergierende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus M auch die Folge

$$\left(\frac{F(x_n) \ominus F(x_o)}{x_n - x_o} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiert (in $\langle \mathbb{I}, +, \cdot, \ominus, \|\cdot\|_m \rangle$).

Der Beweis zu 3.2.1o verläuft genauso wie im Reellen.

3.3 Charakterisierung der punktweisen Differenzierbarkeit von Intervall-Funktionen durch die zugehörigen Randfunktionen

Schröder hat in [27] an einem Beispiel gezeigt, daß die Randfunktionen einer in $x_o \in M$ differenzierbaren I-Funktion F noch nicht einmal einseitige Ableitungen zu besitzen brauchen. Dieser Fall kann bei stetigen I-Funktionen nicht eintreten.
Es sollen nun notwendige und hinreichende Bedingungen an die Randfunktionen einer gegebenen I-Funktion F dafür angegeben werden, daß F in einem Punkt differenzierbar ist. Daraus erhält man insbesondere für stetige I-Funktionen eine einfache Charakterisierung der punktweisen Differenzierbarkeit.

Definition 3.3.1
Sei $f: M \to \mathbb{R}$ und $x_o \in M$. $\xi \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ heißt links- bzw. rechtsseitiger Deriviertenwert bzw. Deriviertenwert von f an der Stelle x_o, falls es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus M gibt mit $x_n < x_o$ und $\lim x_n = x_o$ bzw. mit $x_n > x_o$ und $\lim x_n = x_o$ bzw. mit $\lim x_n = x_o$, so daß gilt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_o)}{x_n - x_o} = \xi$$

Es gilt der
Satz 3.3.2 (vergl. [14])
Jede reelle Funktion besitzt (links-, rechtsseitige) Deriviertenwerte.

Mit $D^- f(x_o)$, $D^+ f(x_o)$ bzw. $Df(x_o)$ werde der Reihe nach die Menge der linksseitigen bzw. der rechtsseitigen Deriviertenwerte bzw. die Menge der Deriviertenwerte von f an der Stelle x_o bezeichnet.
Läßt man für die Ableitung der reellwertigen Abbildung f auch die Werte $\pm\infty$ zu, so gilt der
Satz 3.3.3 (vergl. [14])
Sei $f: M \to \mathbb{R}$, $x_o \in M$. Dann gilt ($|A|$ bezeichne die Kardinalzahl der Menge A):
(1) f ist differenzierbar in x_o genau dann, wenn $|Df(x_o)| = 1$ ist.
(2) f ist links-(rechts-)seitig differenzierbar in x_o genau dann, wenn $|D^- f(x_o)| = 1$ $(= |D^+ f(x_o)|)$ ist.

Für stetige Abbildungen $f: M \to \mathbb{R}$ kann man die Mengen $D^- f(x_o)$ und $D^+ f(x_o)$, $x_o \in M$, genauer charakterisieren. Für unsere Zwecke wichtig ist folgender

Hilfssatz 3.3.4

Sei $f: M \to \mathbb{R}$ stetig in einer Umgebung von $x_o \in M$. Ist $x_o \in \mathring{M}$, so sind die Mengen $D^- f(x_o)$ und $D^+ f(x_o)$ konvex. Ist x_o Randpunkt von M, so gilt diese Aussage für jeweils eine dieser Mengen, je nachdem, ob x_o linker oder rechter Randpunkt von M ist.

Beweis. (für $D^+ f(x_o)$) Falls $f'_+(x_o)$ existiert, so folgt die Behauptung aus 3.3.3. Nehmen wir also an, daß $f'_+(x_o)$ nicht existiert. Nach 3.3.2 ist $D^+ f(x_o)$ nicht leer, enthält also mindestens zwei Elemente. Seien also $\alpha_1, \alpha_2 \in D^+ f(x_o)$ mit $\alpha_1 < \alpha_2$ und sei $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$. Nach 3.3.1 existieren dann zwei Folgen $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R}$ mit

a) $h_n, s_n > o$ und $(x_o+h_n), (x_o+s_n) \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

b) $\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} s_n = o$ und $\lim_{n\to\infty} \varphi_f(h_n) = \alpha_1$, $\lim_{n\to\infty} \varphi_f(s_n) = \alpha_2$,

wobei die Abbildung $\varphi_f : \mathbb{R}\setminus\{o\} \to \mathbb{R}$ definiert ist durch

$$\varphi_f(h) = \frac{f(x_o+h) - f(x_o)}{h} \qquad , h \in \mathbb{R}\setminus\{o\}.$$

Man kann o.B.d.A. annehmen, daß für die beiden Folgen zusätzlich gilt

c) $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind streng monoton fallend und

d) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $s_n < h_n$ und $\varphi_f(h_n) < \alpha < \varphi_f(s_n)$.

Die Abbildung φ_f ist stetig in der punktierten Umgebung $U_\delta(o)\setminus\{o\}$ von o für ein reelles $\delta > o$, da nach Voraussetzung f stetig ist in einer Umgebung von x_o. Man kann weiter o.B.d.A. annehmen, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Punkte h_n und s_n in $U_\delta(o)\setminus\{o\}$ liegen. Dann ist φ_f insbesondere stetig auf den kompakten Intervallen $[s_n, h_n]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Also existiert nach dem Zwischenwertsatz für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $r_n \in [s_n, h_n]$ mit $\varphi_f(r_n) = \alpha$. Die Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat die Eigenschaften a) und b), also ist $\alpha \in D^+ f(x_o)$, und damit ist $D^+ f(x_o)$ konvex.

Bemerkung 3.3.5

Man kann in 3.3.4 nicht auf die Stetigkeit von f verzichten, denn die Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} o & , \text{falls } x \text{ rational} \\ 1 & , \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

besitzt für jedes rationale $x_o \in \mathbb{R}$ die rechtsseitige Deriviertenmenge $D^+ f(x_o) = \{o, \infty\}$; und diese ist nicht konvex.

Über die Existenz der einseitigen Ableitungen einer I-Funktion F an der Stelle x_o kann man die folgende Aussage machen:

Satz 3.3.6

Sei $F = [f,g] : M \to \mathbb{I}$, und sei $x_o \in \mathring{M}$ oder x_o linker Randpunkt von M. Dann gilt: Die rechtsseitige Ableitung $F'_+(x_o)$ existiert genau dann, wenn $u,v \in \mathbb{R}$ existieren mit $u \leq v$ und

a) $D^+f(x_o)$, $D^+g(x_o) \subset \{u,v\}$,

b) für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus M mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_o$ und $x_n > x_o$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Falls einer der beiden Grenzwerte $\lim \varphi_f(x_n)$ oder $\lim \varphi_g(x_n)$ existiert, dann existieren beide Grenzwerte und sind verschieden, falls $u \neq v$ ist (für $f: M \to \mathbb{R}$, $x_o \in M$ und $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ sei $\varphi_f(h) = (f(x_o+h)-f(x_o))/h$).

In diesem Fall ist $F'_+(x_o) = [u,v]$.

Beweis. Sei $F'_+(x_o) = [u,v]$. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $u \neq \alpha \neq v$. Wir zeigen, daß dann α nicht aus $D^+f(x_o)$ sein kann. Ist $\alpha \in D^+f(x_o)$, so gibt es nach Definition 3.3.1 eine Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $(x_o+h_n) \in M$, $h_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \varphi_f(h_n) = \alpha$. Wegen $u \neq \alpha \neq v$ ist $r = \min((|u-\alpha|, |v-\alpha|)/2) > 0$. Zu r existiert ein $n_o \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > n_o$ $|\varphi_f(h_n) - \alpha| < r$ ist. Sei $0 < \varepsilon < r/2$. Da $F'_+(x_o)$ existiert, gibt es zu diesem ε ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > n_1$ gilt

$$(4) \qquad \left\| \frac{F(x_o+h_n) \ominus F(x_o)}{h_n} \ominus [u,v] \right\|_m < \varepsilon$$

Sei o.B.d.A. $n_1 \geq n_o$ und sei $n > n_1$.

Fallunterscheidung:

1) $\varphi_f(h_n) \leq \varphi_g(h_n)$. Dann erhält man aus (4) $|\varphi_f(h_n) - u| < \varepsilon$. Andererseits ist wegen $n > n_o$ aber auch $|\varphi_f(h_n) - \alpha| < r$. Damit erhält man $|u - \alpha| \leq |\varphi_f(h_n) - u| + |\varphi_f(h_n) - \alpha| < \varepsilon + r < 2r$.
Nach Definition von r gilt aber $2r = \min(|u-\alpha|, |v-\alpha|) \leq |u-\alpha|$, und man erhält einen Widerspruch.

2) $\varphi_g(h_n) \leq \varphi_f(h_n)$. Dieser Fall verläuft analog zu 1).

Insgesamt folgt also, daß α kein rechtsseitiger Deriviertenwert von f an der Stelle x_o ist.

Auch der Fall $\pm\infty \in D^+f(x_o)$ kann nicht eintreten. Denn ist z.B. $+\infty \in D^+f(x_o)$, so existiert eine Folge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $h_n > 0$ und $(x_o+h_n) \in M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} \varphi_f(h_n) = +\infty$. Zu $K > \max(|u|, |v|)$ existiert dann ein $n_o \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > n_o$ $\varphi_f(h_n) > K$ ist. Sei weiter $0 < \varepsilon < (K - \max(|u|, |v|))$. Zu diesem ε existiert dann ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß

für alle $n > n_1$ gilt

$$(5) \qquad \left\| \frac{F(x_o+h_n) \ominus F(x_o)}{h_n} \ominus [u,v] \right\|_m < \varepsilon$$

O.B.d.A. sei wieder $n_1 \geq n_o$ und $n \cdot n_1$, und es gelte etwa $\varphi_f(h_n) \leq \varphi_g(h_n)$. Dann erhält man aus (5) $|\varphi_f(h_n) - u| < \varepsilon$ und wegen $n > n_o$ $\varphi_f(h_n) > K$. Damit erhält man insgesamt $\varepsilon < |\varphi_f(h_n)| - |u| \leq |\varphi_f(h_n) - u| < \varepsilon$ und somit einen Widerspruch.

Der Fall $\varphi_g(h_n) < \varphi_f(h_n)$ verläuft analog.

Also kann $+\infty$ kein rechtsseitiger Deriviertenwert von f in x_o sein.

Insgesamt folgt also, daß $D^+f(x_o) \subset \{u,v\}$ ist. Der Beweis für $D^+g(x_o)$ verläuft analog. Also gilt Teil (a) der Behauptung.

b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus M mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_o$ und $x_n > x_o$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es existiere $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_f(x_n)$. Nach a) ist dann der Grenzwert gleich u oder gleich v; sei etwa $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_f(x_n) = u$. Da $F'_+(x_o) = [u,v]$ existiert, so folgt für den Fall u = v sofort die Existenz von $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_g(x_n)$. Sei also $u \neq v$ und sei $\varepsilon < |u-v|/2$. Zu ε existiert dann ein $n_o \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > n_o$ gilt

$$\left\| \frac{F(x_n) \ominus F(x_o)}{x_n - x_o} \ominus [u,v] \right\|_m < \varepsilon .$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_f(x_n) = u$ ist, existiert zu diesem ε ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > n_1$ gilt $|\varphi_f(x_n) - u| < \varepsilon$. Also gilt für alle $n > \max(n_o, n_1)$

$$\left\| \frac{F(x_n) \ominus F(x_o)}{x_n - x_o} \ominus [u,v] \right\| = \max(|\varphi_f(x_n)-u|, |\varphi_g(x_n)-v|) < \varepsilon,$$

und damit existiert insbesondere $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_g(x_n)$ und ist gleich v.

Also gilt auch Teil (b) der Behauptung.

Seien nun u, v reelle Zahlen, für die die Bedingungen a) und b) aus 3.3.6 erfüllt sind. Falls u = v ist, so existieren $f'_+(x_o)$ und $g'_+(x_o)$ und damit auch $F'_+(x_o)$, und es ist $F'_+(x_o) = [u,v]$. Sei also $u \neq v$, weiter sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus M mit $x_n > x_o$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_o$. Falls einer der Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_f(x_n)$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_g(x_n)$ existiert, so existieren nach b) beide Grenzwerte und sind verschieden. Nach a) sind die Grenzwerte gleich u bzw. gleich v. Offensichtlich existiert dann der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(x_n) \ominus F(x_o)}{x_n - x_o}$$

und ist gleich $[u,v]$.

Nehmen wir also an, daß die beiden Limites nicht existieren. Die Folgen $(\varphi_f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\varphi_g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sind beschränkt, da $\pm\infty$ keine rechtsseitigen Deriviertenwerte von f bzw. g in x_o sind. Also besitzen diese Folgen

Häufungspunkte,und diese können sich nur unter den Elementen von $\{u,v\}$ befinden nach Vorausetzung a). Für $\varepsilon = (|u-v|)/2$ sei $M_1 = \{x_n / |\varphi_f(x_n)-u| < \varepsilon\}$ und $M_2 = \{x_n / |\varphi_f(x_n)-v| < \varepsilon\}$. Da die Folge $(\varphi_f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ höchstens die Häufungspunkte u und v besitzt, gibt es höchtens endlich viele Folgenglieder x_n, die weder zu M_1 noch zu M_2 gehören, ihre Gesamtheit werde mit M_3 bezeichnet. Die Mengen M_1 und M_2 besitzen beide unendlich viele Elemente. Sei nun $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Folgenglieder gerade die Elemente von M_1 sind und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jene Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Folgenglieder die Elemente von $M_2 \cup M_3$ sind. Dann existieren die Grenzwerte $\lim \varphi_f(y_n)$ und $\lim \varphi_f(z_n)$ und sind gleich u bzw. gleich v. Daraus erhält man nun sofort, daß der Grenzwert

$$\lim \frac{F(x_n) \ominus F(x_o)}{x_n - x_o}$$

existiert und gleich [u,v] ist. Also existiert $F'_+(x_o)$ und ist gleich [u,v].

Folgerung 3.3.7

Sei $F: M \to \mathbb{I}$, und sei $x_o \in \mathring{M}$ oder x_o linker Randpunkt von M, weiter existiere $F'_+(x_o)$, und es sei $F'_+(x_o) = [u,v]$. Dann existieren entweder beide rechtsseitigen Ableitungen $f'_+(x_o)$ und $g'_+(x_o)$ der Randfunktionen f und g von F gleichzeitig oder es ist $D^+f(x_o) = D^+g(x_o) = \{u,v\}$.

Für die Existenz der linksseitigen Ableitung $F'_-(x_o)$, wobei jetzt $x_o \in \mathring{M}$ oder x_o rechter Randpunkt von M ist, gilt eine zu 3.3.6 analoge Aussage. Zusammen mit 3.2.5 erhält man nun folgende Charakterisierung der punktweisen Differenzierbarkeit von I-Funktionen

Satz 3.3.8

Sei $F = [f,g]: M \to \mathbb{I}$. Dann folgt: F ist differenzierbar in $x_o \in \mathring{M}$ genau dann, wenn $u,v \in \mathbb{R}$ existieren mit $u < v$ und

a) $D^+f(x_o), D^-f(x_o), D^+g(x_o), D^-g(x_o) \subset \{u,v\}$,

b) für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus M mit $\lim x_n = x_o$ und $x_n < x_o$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bzw. $x_n > x_o$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Falls einer der beiden Limites $\lim \varphi_f(x_n)$ oder $\lim \varphi_g(x_n)$ existiert, dann existieren beide und sind im Falle $u \neq v$ verschieden.

In diesem Falle gilt $F'(x_o) = [u,v]$.

Der Fall, daß $x_o \in M$ Randpunkt von M ist, wurde schon in 3.3.6 behandelt.

Die Aussage von 3.3.8 soll noch einmal an dem folgenden Beispiel verdeutlicht werden.

Beispiel 3.3.9

Sei $M = (-1,1)$, und sei $F = [f,g]: M \to \mathbb{II}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ falls } x \in \mathbb{Q} \cap (-1,0] \\ 2x \text{ sonst} \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2x + 1, \text{ falls } x \in \mathbb{Q} \cap (-1,0] \\ x + 1 \text{ sonst} \end{cases};$$

dabei werde wie üblich mit $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen bezeichnet.

Dann existieren die rechtsseitigen Ableitungen von f und g in $x_o = 0$ und $f'_+(0) = 2$, $g'_+(0) = 1$. Also existiert auch $F'_+(0)$ und ist gleich $[1,2]$. Es ist $D^-f(0) = \{1,2\} = D^-g(0)$, und offensichtlich gilt für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus M mit $\lim x_n = 0$ und $x_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$: Falls einer der beiden Grenzwerte $\lim \varphi_f(x_n)$ oder $\lim \varphi_g(x_n)$ existiert, so existieren beide und sind verschieden. Somit existiert nach 3.3.8 $F'(0)$ und ist gleich $[1,2]$.

Bei stetigen I-Funktionen vereinfacht sich die Aussage von 3.3.8, und man erhält

Satz 3.3.10

Sei $F = [f,g]: M \to \mathbb{II}$ und $x_o \in \mathring{M}$ oder x_o linker Randpunkt von M. Weiter sei F stetig in einer rechtsseitigen Umgebung $[x_o, x_o + \delta)$, $\delta > 0$, von x_o. Dann ist F rechtsseitig differenzierbar in x_o genau dann, wenn sowohl $f'_+(x_o)$ als auch $g'_+(x_o)$ existieren, und dann gilt $F'_+(x_o) = f'_+(x_o) \vee g'_+(x_o)$.

Beweis. Es existiere $F'_+(x_o)$. Angenommen, eine der beiden einseitigen Ableitungen $f'_+(x_o)$ oder $g'_+(x_o)$ existiert nicht (dann existieren beide nicht nach 3.3.8). Bezeichnet man $F'_+(x_o)$ mit $[u,v]$, dann ist also $u \neq v$ und $D^+f(x_o) = \{u,v\}$. Wegen der Stetigkeit von F sind auch f und g stetig in $[x_o, x_o + \delta)$, und daher sind wegen 3.3.4 die Mengen $D^+f(x_o)$ und $D^+g(x_o)$ konvex. Also muß gelten $D^+f(x_o) \supset [u,v]$, das ist ein Widerspruch zu 3.3.8.

Die umgekehrte Richtung ist klar.

Für stetige I-Funktionen gilt eine zu 3.3.1o analoge Aussage über die Existenz der linksseitigen Ableitung $F'_-(x_o)$, wobei jetzt $x_o \in \mathring{M}$ oder $x_o \in M$ und x_o rechter Randpunkt von M ist.

Damit erhält man folgende Charakterisierung der punktweisen Differenzierbarkeit für stetige I-Funktionen:

Satz 3.3.11

Sei $F = [f,g]: M \to \mathbb{I}$ stetig in einer Umgebung des Punktes $x_o \in M$.
Fall $x_o \in \mathring{M}$ ist, dann ist F genau dann differenzierbar in x_o, wenn entweder beide Ableitungen $f'(x_o)$ und $g'(x_o)$ existieren oder beide Ableitungen nicht existieren und dafür alle einseitigen Ableitungen von f und g in x_o existieren mit $f'_+(x_o) = g'_-(x_o)$ und $f'_-(x_o) = g'_+(x_o)$.
Falls x_o Randpunkt von M ist, so ist F nach Definition 3.2.1 genau dann differenzierbar in x_o, wenn die entsprechenden einseitigen Ableitungen von f und g in x_o existieren.
Falls F differenzierbar ist in x_o, so gilt im Falle der Existenz von $f'(x_o)$ und $g'(x_o)$, daß $F'(x_o) = f'(x_o) \vee g'(x_o)$ ist; existieren die Ableitungen von f und g in x_o nicht, so gilt $F'(x_o) = f'_+(x_o) \vee g'_+(x_o) = f'_-(x_o) \vee g'_-(x_o)$.

Beweis. Sei $x_o \in \mathring{M}$. Wegen Satz 3.2.5 ist F genau dann differenzierbar in x_o, wenn die einseitigen Ableitungen $F'_+(x_o)$ und $F'_-(x_o)$ existieren und gleich sind. Damit erhält man die Behauptung sofort aus 3.3.1o.
Falls x_o Randpunkt von M ist, ist nichts mehr zu zeigen.

Korollar 3.3.12

Sei $F: M \to \mathbb{I}$. F ist differenzierbar in M genau dann, wenn für alle $x \in M$ die einseitigen Ableitungen von f und g existieren und für alle $x \in \mathring{M}$ gilt: Entweder existieren $f'(x)$ und $g'(x)$, oder es gilt $f'_-(x) = g'_+(x)$ und $f'_+(x) = g'_-(x)$.

Bemerkung 3.3.13

In Korollar 3.3.12 muß die Stetigkeit von F nicht extra gefordert werden, da sie aus der Differenzierbarkeit von F auf M folgt.

Man kann noch genauere Aussagen machen über die Anzahl der Stellen $x_o \in M$, in denen die Randfunktionen einer differenzierbaren I-Funktion $F: M \to \mathbb{I}$ nicht differenzierbar sind. Es gilt der

Satz 3.3.14 (vergl. [6])

Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$. Dann existieren höchstens abzählbar viele Punkte $x_o \in (a,b)$ mit der Eigenschaft:
Die einseitigen Ableitungen $f'_+(x_o)$ und $f'_-(x_o)$ existieren und sind verschieden.

Hieraus erhält man für differenzierbare I-Funktionen den folgenden

Satz 3.3.15

Sei $F = [f,g]: M \to \mathbb{I}$ differenzierbar in M. Dann existiert eine höchstens abzählbare Teilmenge A_F von M,so daß gilt:
Die Randfunktionen f und g sind beide differenzierbar in $M \setminus A_F$ (in A_F existieren noch die einseitigen Ableitungen von f und g), und es gilt für alle $x \in M \setminus A_F$ $F'(x) = f'(x) \vee g'(x)$.

Mit den Sätzen 3.3.11 und 3.3.15 ist die Differenzierbarkeit von I-Funktionen im Sinne von Markov hinreichend charakterisiert.

Bemerkung 3.3.16

In [2] hat Ratschek Differenzierbarkeit für I-Funktionen als Umkehroperation der Integration für I-Funktionen definiert. Im Gegensatz zu im Sinne von Markov differenzierbaren I-Funktionen sind im Sinne von Ratschek differenzierbare I-Funktionen i.a. nicht stetig, vgl. die Beispiele in [2]. Die Stetigkeit muß daher, falls benötigt, immer zusätzlich zur Differenzierbarkeit gefordert werden.

3.4 Rechenregeln für differenzierbare Intervall-Funktionen

Man kann einige der Ergebnisse für reelle, differenzierbare Abbildungen übertragen auf differenzierbare I-Funktionen. Zunächst gilt der

Satz 3.4.1

Seien $F: M \to \mathbb{I}$ und $f: M \to \mathbb{R}$ differenzierbar in M, und sei $A \in \mathbb{I}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind die I-Funktionen αF, Af, $(F+A)$, $(F \oplus A)$, $(F-A)$, $(F \ominus A)$ differenzierbar in M, und es gilt:

$(\alpha F)' = \alpha F'$, $(Af)' = Af'$, $(F+A)' = F'$, $(F \oplus A)' = F'$, $(F-A)' = F'$ und $(F \ominus A)' = F'$.

Beweis. Diese Ergebnisse stehen zum Teil schon in [11]. Der Beweis der einzelnen Aussagen folgt sofort aus der Definition der M-Differenz und der Stetigkeit des S-Operators.

Seien $F,G: M \to \mathbb{I}$ differenzierbar in M. Dann sind auch $(F+G)$ und $(F-G)$ differenzierbar in M, es gelten jedoch nicht mehr die vom Reellen her bekannten Ergebnisse. Es besteht jedoch noch ein gewisser Dualismus zwischen den Operationen '$+, \oplus$' und '$-, \ominus$'.

Zur Vereinfachung der Schreibweise soll noch folgende Abkürzung eingeführt werden: Sei $F: M \to \mathbb{I}$ differenzierbar in M, wegen 3.3.12 existieren dann alle einseitigen Ableitungen der zugehörigen Randfunktionen und damit auch alle einseitigen Ableitungen von (λF). Dann sei für $x_o \in M$

$$v_F(x_o) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x_o \in \mathring{M} \text{ oder } x_o \text{ linker Randpunkt von M ist und } (\lambda F)'_+(x_o) \geq 0 \\ & \text{oder falls } x_o \text{ rechter Randpunkt von M ist und } (\lambda F)'_-(x_o) \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 3.4.2

Seien $F,G: M \to \mathbb{I}$ differenzierbar in M. Dann ist auch $(F+G)$ differenzierbar in M, und für alle $x_o \in M$ gilt

$$(F+G)'(x_o) = \begin{cases} F'(x_o)+G'(x_o), & \text{falls } v_F(x_o) = v_G(x_o) \\ F'(x_o) \oplus G'(x_o) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Sei $F = [f_1, f_2]$ und $G = [g_1, g_2]$. Wegen 3.3.12 kann man o.B.d.A. annehmen, daß für $x_o \in \mathring{M}$ für die Randfunktionen von F und G nur die einseitigen Ableitungen existieren. Dann gilt also für f_1 und f_2:

$$(f_1)'_+(x_o) = (f_2)'_-(x_o) \text{ und } (f_1)'_-(x_o) = (f_2)'_+(x_o).$$

Eine analoge Aussage gilt für die g_1, g_2.

Mit den Abkürzungen $\varphi_F(x) = ((F(x) \ominus F(x_o))/(x-x_o))$ für $x \neq x_o$ und $\varphi_f(x) = ((f(x)-f(x_o))/(x-x_o))$ für $x \neq x_o$, wobei $F: M \to \mathbb{II}$ und $f: M \to \mathbb{R}$ sind, erhält man

(6) $\varphi_{F+G}(x) = (\varphi_{f_1}(x) + \varphi_{g_1}(x)) \vee (\varphi_{f_2}(x) + \varphi_{g_2}(x))$ für $x \in M$ mit $x \neq x_o$.

Nach Annahme existieren die einseitigen Ableitungen der f_i und g_i, $i = 1,2$, und daher existieren wegen der Stetigkeit des S-Operators die einseitigen Ableitungen von (F+G) in x_o, und es gilt wegen (6)

$$(F+G)'_+(x_o) = ((f_1)'_+(x_o)+(g_1)'_+(x_o)) \vee ((f_2)'_+(x_o)+(g_2)'_+(x_o)) =$$

$$= ((f_2)'_-(x_o)+(g_2)'_-(x_o)) \vee ((f_1)'_-(x_o)+(g_1)'_-(x_o)) = (F+g)'_-(x_o).$$

Also ist (F+G) differenzierbar in x_o.

Sei $v_F(x_o) = v_G(x_o)$, und es gelte etwa $(\lambda F)'_+(x_o)$, $(\lambda G)'_+(x_o) \geq 0$. Dann ist also $(f_1)'_+(x_o) \leq (f_2)'_+(x_o)$ und $(g_1)'_+(x_o) \leq (g_2)'_+(x_o)$, und man erhält aus (6) $(F+G)'(x_o) = F'(x_o)+G'(x_o)$.

Sei $v_F(x_o) \neq v_G(x_o)$, etwa $(\lambda F)'_+(x_o) \geq 0 > (\lambda G)'_+(x_o)$. Dann ist also $F'(x_o) = [(f_1)'_+(x_o), (f_2)'_+(x_o)]$ und $G'(x_o) = [(g_2)'_+(x_o), (g_1)'_+(x_o)]$, und man erhält aus der Definition von $\oplus$ und aus (6)

$$(F+G)'(x_o) = \begin{cases} F'(x_o) \dot{+} G'(x_o), \text{ falls } \lambda(F'(x_o)) \geq \lambda(G'(x_o)) \\ G'(x_o) \dot{+} F'(x_o) \quad \text{sonst} \end{cases}$$

also in jedem Fall $(F+G)'(x_o) = F'(x_o) \oplus G'(x_o)$.

Korollar 3.4.3

Seien F,G: $M \to \mathbb{II}$ differenzierbar in M. Dann gilt

a) Falls $v_F(x) = v_G(x)$ für alle $x \in M$, dann ist $(F+G)' = F'+G'$.

b) Falls $v_F(x) \neq v_G(x)$ für alle $x \in M$, dann ist $(F+G)' = F' \oplus G'$.

Folgerung 3.4.4 (vergl. [11])

Seien F,G: $M \to \mathbb{II}$ differenzierbar in M, dann gilt

a) Falls λF und λG beide monoton fallend oder beide monoton steigend sind, so ist $(F+G)' = F'+G'$.

b) Falls λF und λG entgegengesetzt monoton sind, so ist $(F+G)' = F' \oplus G'$.

Beweis. (a) Seien o.B.d.A. λF und λG fallend in M. Wegen 3.2.8 existieren dann die Ableitungen der zu F bzw. zu G gehörigen Randfunktionen f_i bzw. g_i, $i=1,2$, und es gilt $f_2' \leq f_1'$ und $g_2' \leq g_1'$ auf M. Sei nun $x \in M$, so daß

$v_F(x) \neq v_G(x)$ ist. Dann muß $(\lambda F)'_+(x) < 0 = (\lambda G)'_+(x)$ sein oder umgekehrt. Nun gilt für Intervalle $A,B \in \mathbb{I}$, von denen eines ein Punktintervall ist, $A \oplus B = A+B$. Also folgt die Behauptung aus 3.4.2.

(b) Sei etwa λF steigend und λG fallend. Dann ist also $(\lambda F)'_+ \geq 0 \geq (\lambda G)'_+$ auf M. Es gebe ein $x \in M$, so daß $v_F(x) = v_G(x)$ ist. Dann muß $(\lambda G)'_+(x) = 0$ sein, und man erhält die Behauptung mit dem gleichen Argument wie in a).

Beispiel 3.4.5 (vergl. [11])

Sei $F: \mathbb{R} \to \mathbb{I}$ ein Intervall-Polynom n-ten Grades um x_o, d.h. F ist von der Form (vgl. auch [18])

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} (x-x_o)^k A_k, \quad A_k \in \mathbb{I} \text{ und } x \in \mathbb{R}, \; x_o \in \mathbb{R} \text{ fest und } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist F auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$F'(x) = \sum_{k=1}^{n} k(x-x_o)^{k-1} A_k \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zunächst einmal sind alle Monome $(x-x_o)^k A_k$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ nach 3.4.1 und besitzen die Ableitung $k(x-x_o)^{k-1} A_k$. Wegen $\lambda((x-x_o)^k A_k) = |x-x_o|^k \lambda(A_k)$ ist $\lambda((x-x_o)^k A_k)$ fallend auf dem Intervall $(-\infty, x_o]$ und steigend auf $[x_o, +\infty)$. Daher erhält man aus 3.4.4 die Behauptung.

Wir hatten schon gezeigt, daß $(F \ominus G)$ stetig ist, falls F und G es sind. Es gilt auch

Satz 3.4.6

Seien $F,G: M \to \mathbb{I}$ differenzierbar in M. Dann ist auch $(F \ominus G)$ differenzierbar in M, und es gilt für alle $x_o \in M$

$$(F \ominus G)'(x_o) = \begin{cases} F'(x_o) \ominus G'(x_o), & \text{falls } v_F(x_o) = v_G(x_o) \\ F'(x_o) - G'(x_o) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Es werde o.B.d.A. angenommen, daß $\lambda G(x_o) \subset \lambda F(x_o)$ ist für $x_o \in \hat{M}$. Bezeichnet man wie üblich die Randfunktionen von F bzw. von G mit f_i bzw. mit g_i, i=1,2, so folgt aus dieser Annahme

$$F(x_o) \ominus G(x_o) = [f_1(x_o)-g_1(x_o), f_2(x_o)-g_2(x_o)] \text{ und } (f_1-g_1)(x_o) < (f_2-g_2)(x_o).$$

Da die f_i und g_i stetig sind, so gibt es also eine Umgebung $U_\delta(x_o)$ von x_o, so daß für alle $x \in U_\delta(x_o)$ $(f_1-g_1)(x) < (f_2-g_2)(x)$ erfüllt ist.
Sei nun $x \in U_\delta(x_o)$ und $x \neq x_o$, dann gilt mit den für die Differenzenquotienten von $f: M \to \mathbb{R}$ und $F: M \to \mathbb{I}$ in 3.4.2 verwendeten Abkürzungen

$$(7) \qquad \varphi_{F \ominus G}(x) = (\varphi_{f_1}(x) - \varphi_{g_1}(x)) \vee (\varphi_{f_2}(x) - \varphi_{g_2}(x)).$$

Man kann nun z.B. wieder annehmen, daß für die Randfunktionen f_i und g_i nur die einseitigen Ableitungen in x_o existieren. Damit erhält man dann aus (7) die Existenz der einseitigen Ableitungen von $(F \ominus G)$ an der Stelle x_o und die Gültigkeit von

$$(F \ominus G)'_-(x_o) = ((f_1)'_-(x_o) - (g_1)'_-(x_o)) \vee ((f_2)'_-(x_o) - (g_2)'_-(x_o)) =$$

$$= ((f_2)'_+(x_o) - (g_2)'_+(x_o)) \vee ((f_1)'_+(x_o) - (g_1)'_+(x_o)) = (F \ominus G)'_+(x_o).$$

Also existiert $(F \ominus G)'(x_o)$.

Der Rest der Behauptung folgt nun ähnlich wie bei 3.4.2 durch Unterscheidung der Fälle $v_F(x_o) = v_G(x_o)$ und $v_F(x_o) \neq v_G(x_o)$.

Korollar 3.4.7

Seien $F,G: M \to \mathbb{I}$ differenzierbar in M. Dann gilt

a) Falls $v_F = v_G$, dann ist $(F \ominus G)' = F' \ominus G'$.

b) Falls $v_F(x) \neq v_G(x)$ für alle $x \in M$, so ist $(F \ominus G)' = F' - G'$.

Folgerung 3.4.8 (vergl. [11])

Seien $F,G: M \to \mathbb{I}$ differenzierbar in M.

a) Falls λF und λG beide fallend oder beide steigend sind, so gilt
$(F \ominus G)' = F' \ominus G'$.

b) Falls λF und λG entgegengesetzt monoton sind, so gilt
$(F \ominus G)' = F' - G'$.

Ähnlich wie 3.4.6 beweist man den

Satz 3.4.9

Seien $F,G: M \to \mathbb{I}$ differenzierbar in M. Dann ist auch $(F \oplus G)$ differenzierbar in M, und für $x_o \in M$ gilt

$$(F \oplus G)'(x_o) = \begin{cases} F'(x_o) \oplus G'(x_o), & \text{falls } v_F(x_o) = v_G(x_o) \\ F'(x_o) + G'(x_o) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Korollar 3.4.10

Es gelten die Voraussetzungen von 3.4.9

a) Falls $v_F = v_G$ gilt, so ist $(F \oplus G)' = F' \oplus G'$

b) Falls $v_F(x) \neq v_G(x)$ für alle $x \in M$ gilt, so ist $(F \oplus G)' = F' + G'$.

Folgerung 3.4.11

Es gelten die Voraussetzungen von 3.4.9.

a) Falls λF und λG beide fallend oder beide steigend sind in M,

dann gilt $(F \oplus G)' = F' \oplus G'$.

b) Falls λF und λG entgegengesetzt monoton sind auf M, dann gilt $(F \oplus G)' = F' + G'$.

Beispiel 3.4.12

Man bezeichnet eine I-Funktion $F: M \to \mathbb{I}$ der Form $F(x) = A \dot{+} (x-x_o) B$ mit $A,B \in \mathbb{I}$, $x_o \in M$ fest und $\lambda A \geq \lambda(x-x_o)B$ für alle $x \in M$ als verallgemeinertes I-Polynom 1-ten Grades um x_o. Es gilt: F ist differenzierbar in M, und es ist $F'(x) = B$ für alle $x \in M$.

Zunächst einmal kann man F in der Form $F = F_1 \dot{+} F_2$ schreiben mit $F_1(x) = A$ und $F_2(x) = (x-x_o)B$ für $x \in M$. F_1 und F_2 sind nun differenzierbar in M, und es ist $v_{F_1} = 1$, $v_{F_2}(x) = 1$ für $x \geq x_o$ und $v_{F_2}(x) = o$ für $x < x_o$. Daher erhält man mit 3.4.9

$$F'(x) = (F_1 \dot{+} F_2)'(x) = \begin{cases} A' \oplus ((x-x_o)B)', & \text{falls } x \geq x_o \\ A' + ((x-x_o)B)' & \text{sonst,} \end{cases}$$

und daraus erhält man sofort die Behauptung.

Nach ähnlichem Muster wie die bisherigen Aussagen beweist man den

Satz 3.4.13

Seien $F,G: M \to \mathbb{I}$ differenzierbar in M. Dann ist auch (F-G) differenzierbar in M, und es gilt für $x_o \in M$

$$(F-G)'(x_o) = \begin{cases} F'(x_o) - G'(x_o), & \text{falls } v_F(x_o) = v_G(x_o) \\ F'(x_o) \ominus G'(x_o) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Korollar 3.4.14

Es gelten die Voraussetzungen von 3.4.13.

a) Falls $v_F = v_G$ ist, so gilt $(F-G)' = F'-G'$.

b) Falls $v_F(x) \neq v_G(x)$ für alle $x \in M$ ist, so gilt $(F-G)' = F' \ominus G'$.

Folgerung 3.4.15

Es gelten die Voraussetzungen von 3.4.13.

a) Falls λF und λG beide fallend oder beide steigend sind, so ist $(F-G)' = F'-G'$.

b) Falls λF, λG entgegengesetzt monoton sind auf M, so ist $(F-G)' = F' \ominus G'$.

Bemerkung 3.4.16

Man entnimmt den Sätzen 3.4.1 und 3.4.2, daß die Klasse $C^1(M,\mathbb{I})$ der auf

M stetig differenzierbaren I-Funktionen $F:M \to \mathbb{I}$ einen quasilinearen Raum bildet bzgl. der punktweise erklärten Addition und skalaren Multiplikation. Die Klasse $C^1(M,\mathbb{R})$ der reellen, auf M stetig differenzierbaren Abbildungen $f:M \to \mathbb{R}$ ist ein quasilinearer Unterraum von $C^1(M,\mathbb{I})$.

Satz 3.4.17 (vgl. [11])

Seien $h:M_1 \to M_2$ und $F:M_2 \to \mathbb{I}$, $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}$, beide differenzierbar in M_1 bzw. in M_2. Dann ist auch die zusammengesetzte Funktion $F \circ h:M_1 \to \mathbb{I}$ differenzierbar in M_1, und für alle $x \in M_1$ gilt

(8) $\quad (F \circ h)'(x) = h'(x) \cdot F'(x)$;

dabei ist $h'(x) \in \mathbb{R}$, $F'(x) \in \mathbb{I}$, und die rechte Seite von (8) ist das Intervall, welches entsteht, wenn man das Intervall $F'(x)$ mit dem Skalar $h'(x)$ aus $\mathbb{R}$ multipliziert.

Beweis. Setzt man $F = [f_1, f_2]$ und $F \circ h = [g_1, g_2]$, dann ist $g_i = f_i \circ h$ für $i = 1,2$. Aus den Voraussetzungen folgt nun leicht die Existenz von $g_i'(x)$ für $x \in M$ bzw. die Existenz der einseitigen Ableitungen der g_i an der Stelle x und die Gleichheit der entsprechenden einseitigen Ableitungen sowie die Gültigkeit von (8).

3.5 Der Mittelwertsatz für Intervall-Funktionen, Optimalität der Mittelwertsatz-Einschließung

Eine wichtige Anwendung von I-Funktionen liegt in der einschließenden Approximation von Abbildungen, d.h. zu einer gegebenen I-Funktion $F: M \to \mathbb{I}$ wird eine (möglichst einfach zu berechnende) I-Funktion $G: M \to \mathbb{I}$ mit der Eigenschaft $F \leq G$ (d.h. $F(x) \subset G(x)$ für alle $x \in M$) gesucht, vergl. [21] und [25].

Für den von Markov definierten Differenzierbarkeitsbegriff für I-Funktionen soll in 3.5 ein Mittelwertsatz für Abbildungen $F \in C^1$ hergeleitet werden, der gleichzeitig eine einschließende Approximation für diese F liefert. Diese Mittelwertsatz - Approximation wird sodann auf ihre Approximationsgüte, d.h. auf Optimalität untersucht. Es wird gezeigt, daß die Mittelwertsatz-Approximation beste berechenbare Approximation für C^1 ist.

Im folgenden sei wieder M eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}$. Mit $C^1(M, \mathbb{I})$, kurz C^1, wird die Klasse der stetig differenzierbaren I-Funktionen $F: M \to \mathbb{I}$ bezeichnet. Weiter sei $x_o \in M$ fest. Dann gilt:

Satz 3.5.1 (vergl. [11])

a) Sei $F: M \to \mathbb{I}$ stetig in M und differenzierbar in $\mathring{M} \setminus \{x_o\}$.
Dann existieren für jedes $x \in M \setminus \{x_o\}$ Elemente $\xi, \eta \in \overset{\circ}{x \vee x_o}$ mit

$$\frac{F(x) \ominus F(x_o)}{x - x_o} \subset F'(\xi) \vee F'(\eta). \tag{9}$$

b) Sei $F: M \to \mathbb{I}$ stetig differenzierbar in M, dann ist $F'(M)$ konvex und

$$\frac{F(x) \ominus F(x_o)}{x - x_o} \subset F'(M) \quad \text{für alle } x \in M \setminus \{x_o\}. \tag{10}$$

Falls $M \in \mathbb{I}$ ist, dann ist auch $F'(M) \in \mathbb{I}$, und es gilt für alle $x \in M$

$$F(x) \subset F(x_o) + (x - x_o) F'(M). \tag{11}$$

Beweis. Sei $F = [f,g]$. Dann sei wie üblich $\varphi_f(x) = (f(x) - f(x_o))/(x - x_o)$, wobei $x \neq x_o$ ist.

a) Sei $x \in M \setminus \{x_o\}$. Wegen 5.4.1 existiert ein $\xi \in \overset{\circ}{x \vee x_o}$ mit $\varphi_f(x) \in f'_+(\xi) \vee f'_-(\xi)$. Weiterhin gilt wegen Satz 3.3.1o $F'(\xi) = f'_+(\xi) \vee f'_-(\xi)$. Also folgt $\varphi_f(x) \in F'(\xi)$. Genauso erhält man die Existenz eines $\eta \in \overset{\circ}{x \vee x_o}$ mit $\varphi_g(x) \in F'(\eta)$. Insgesamt folgt also

$$\varphi_F(x) = \frac{F(x) \ominus F(x_o)}{x-x_o} \subset F'(\xi) \vee F'(\eta).$$

b) Falls F' stetig ist, dann ist F'(M) ein Intervall in $\mathbb{R}$. Nach a) existieren für jedes $x \in M \setminus \{x_o\}$ $\xi, \eta \in x \vee x_o$, so daß (9) gilt. Wegen der Inklusion $F'(\xi) \vee F'(\eta) \subset F'(M)$ gilt dann die Behauptung.
Ist $M \in \mathbb{II}$, dann ist auch $F'(M) \in \mathbb{II}$, da M kompakt und F' stetig ist. Nun folgt für $A,B,C \in \mathbb{II}$ aus der Inklusion $A \ominus B \subset C$ immer $A \subset B + C$. (Die Umkehrung dieser Aussage ist nur richtig für $\lambda A \geq \lambda B$). Zusammen mit (1o) erhält man daraus $F(x) \subset F(x_o) + (x-x_o)F'(M)$ für alle $x \in M$.

Bemerkung 3.5.2

1) Im allgemeinen existiert zu $x \in M \setminus \{x_o\}$ kein $\xi \in \overset{\circ}{x \vee x_o}$, so daß

$$\frac{F(x) \ominus F(x_o)}{x-x_o} \subset F'(\xi) \text{ gilt.}$$

2) Im allgemeinen gilt für $x \in M \setminus \{x_o\}$ nicht

$$\frac{F(x) \ominus F(x_o)}{x-x_o} \subset F'(\xi) \cup F'(\eta).$$

Es ist $F'(\xi) \cup F'(\eta) \subset F'(\xi) \vee F'(\eta)$, und die beiden Mengen sind genau dann gleich, wenn $F'(\xi) \cap F'(\eta) \neq \emptyset$ ist.

3) In [21] hat Ratschek für einen anderen Differenzierbarkeitsbegriff den Mittelwertsatz für I-Funktionen in der Form (11) hergeleitet, vgl. [21]. I-Funktionen, die im Sinne von Ratschek differenzierbar sind, brauchen nicht stetig zu sein, d.h. sind i.a. nicht differenzierbar im Sinne von Markov. Zur Herleitung des Mittelwertsatzes muß daher in [21] zusätzlich zur stetigen Differenzierbarkeit die Stetigkeit der I-Funktionen gefordert werden.

Folgerung 3.5.3

Sei $F: M \to \mathbb{II}$ differenzierbar in M, und es gelte $F' = \dot{0}$. Dann ist F konstant auf M.

Beweis. Sei $x_o \in M$ fest. Wegen 3.5.1,(1o) gilt dann für jedes $x \in M$, $x \neq x_o$ $(F(x) \ominus F(x_o))/(x-x_o)) \subset F'(M)$. Nach Voraussetzung ist aber $F'(M) = \bigcup_M F'(x) = \dot{0}$. Für Intervalle $A,B \in \mathbb{II}$ folgt aus $A \subset B$ stets $xA \subset xB$, $x \in \mathbb{R}$. Also folgt $F(x) \ominus F(x_o) \subset \dot{0}$, d.h. $F(x) \ominus F(x_o) = \dot{0}$ für alle $x \in M$ mit $x \neq x_o$. Nach Definition der M-Differenz $\ominus$ folgt aber daraus $F(x) = F(x_o)$ für alle $x \in M$, d.h. es gilt die Behauptung.

Der Mittelwertsatz liefert eine einschließende Approximation T^1 für die Klasse $C^1(M,\mathbb{I})$, wenn $M \in \mathbb{I}$ gilt. Diese ist nach (11) für $F \in C^1(M,\mathbb{I})$ definiert durch

(12) $$T^1F(x) = F(x_o) + (x-x_o)F'(M), \quad x \in M.$$

Wegen (12) ist also T^1F für $F \in C^1(M,\mathbb{I})$ ein I-Polynom 1-ten Grades und daher stetig differenzierbar auf M. Insbesondere ist T^1 eine Abbildung von $C^1(M,\mathbb{I})$ in sich. Für den Rest von § 3.5 sei stets $M \in \mathbb{I}$ und $x_o \in M$ fest. Die Wertzuweisungen $W_o, W_1 : C^1(M,\mathbb{I}) \to \mathbb{I}$ seien definiert durch $W_o(F) = F(x_o)$ und $W_1(F) = F'(M) = \bigcup_M F(x) \in \mathbb{I}$. Dann ist der Approximationsoperator T^1 berechenbar bzgl. der Werte W_o, W_1, denn die (rationale) Abbildung $\alpha : \mathbb{I}^2 \times M \to \mathbb{I}$, definiert durch $\alpha(V_o,V_1,x) = V_o + (x-x_o)V_1$ für (V_o,V_1,x) aus $\mathbb{I}^2 \times M$, erfüllt ja

$$T^1F(x) = \alpha(W_o(F), W_1(F), x)$$

für alle $F \in C^1(M,\mathbb{I})$ und alle $x \in M$. Weiter gilt die folgende Optimalitätsaussage (wegen der Bezeichnungen vgl. § 2.4).

Satz 3.5.4 (vgl. [24])
Die Mittelwertsatz-Approximation T^1 ist beste Approximation für die Klasse $C^1(M,\mathbb{I})$ bzgl. $\mathcal{O}(C^1, W_o, W_1)$.

Beweis. Es wurde bereits festgestellt, daß $T^1 : C^1 \to C^1$ gilt. Weiter gilt für jedes $F \in C^1$ $(T^1F)'(x) = F'(M)$ für alle $x \in M$. Also gilt auch $W_i(F) = W_i(T^1F)$ für alle $F \in C^1$ und für $i = 0,1$. Damit folgt nun die Behauptung wegen 2.4.5.

Die Approximation $T^1 : C^1 \to C^1$ ist nicht optimal für C^1 bzgl. $\mathcal{O}(C^1, T^1(C^1))$, denn sie ist nicht quasi-isoton.

Beispiel 3.5.5
Sei $M = [0,1]$, $x_o = 0$, und seien $F_1, F_2 \in C^1(M,\mathbb{I})$ mit $F_1(x) = [-1,1]x^2$, $F_2(x) = [-1,1]x$. Dann gilt $F_2 \geq F_1$. Weiter ist $T^1F_2 = F_2 \leq T^1F_1$, und es gilt $T^1F_1 \neq T^1F_2$. Also ist T^1 nicht quasi-isoton.

Es bezeichne $\mathbb{P}^1(M,\mathbb{I})$ die Klasse aller I-Polynome 1-ten Grades $F : M \to \mathbb{I}$ und $\mathbb{P}^1_{x_o}(M,\mathbb{I})$ jene Teilmenge von $\mathbb{P}^1$, deren Elemente um $x_o \in M$ entwickelt sind. Es stellt sich nun die Frage, für welche $F \in C^1$ dann $T^1F = F$ gilt.

Hilfssatz 3.5.6
Es ist $T^1(C^1(M,\mathbb{I})) = \mathbb{P}^1_{x_o}(M,\mathbb{I})$, und daher gilt $T^1F = F$ genau dann, wenn $F \in \mathbb{P}^1_{x_o}(M,\mathbb{I})$ ist.

Beweis. Nach Konstruktion von T^1 gilt $T^1(C^1) \subset \mathbb{P}^1_{x_o}$. Sei nun $F \in \mathbb{P}^1_{x_o}$. Dann ist F von der Form $F(x) = A + (x-x_o)B$. Wegen $F(x_o) = A$ und $F'(M) = B$ erhält man daraus sofort $F = T^1F$. Also ist $T^1(C^1) = \mathbb{P}^1_{x_o}$.

Bemerkung 3.5.7

Sei $F:\mathbb{R} \to \mathbb{I}$ ein I-Polynom 1-ten Grades um x_o, und sei $z_o \in \mathbb{R}$ mit $x_o \neq z_o$. Dann kann man i.a. F nicht umentwickeln in ein Polynom um z_o. Das liegt daran, daß I-Polynome mit zunehmender Entfernung vom Entwicklungspunkt x_o breiter werden. Damit ist der Beweis der folgenden Aussage klar:
Sei $F:\mathbb{R} \to \mathbb{I}$ ein I-Polynom 1-ten Grades um x_o. Dann ist F genau dann entwickelbar in ein Polynom um $z_o \neq x_o$ (für jedes $z_o \in \mathbb{R}$), wenn $\lambda F = \text{const.}$ ist, d.h. wenn F von der Form ist $F(x) = A + (x-x_o)b$, $A \in \mathbb{I}$, $b \in \mathbb{R}$ und $x \in M$.

Trotz der Optimalitätsaussage von 3.5.4 liefert die Mittelwertsatz-Approximation T^1 nicht immer zufriedenstellende Einschließungsergebnisse.
Denn sei z.B. $M = [1/2,1]$, $x_o = 1/2$ und $F \in C^1(M,\mathbb{I})$ mit $F(x) = [-1,1]\,(1/x)$.
Dann ist $T^1F(x) = [-4,4]x$, $x \in M$.
Die durch T^1F vermittelte Einschließung ist in diesem Fall sicher nicht mehr befriedigend; denn während F mit zunehmender Entfernung vom Entwicklungspunkt x_o schmaler wird, wird T^1F breiter.
I-Polynome sind zur Approximation von I-Funktionen $F \in C^1$ obigen Typs nicht geeignet, da sie mit zunehmender Entfernung vom Entwicklungspunkt breiter werden. In § 4 werden Klassen von I-Funktionen vorgestellt, die für diesen Fall sehr viel besser zur Approximation geeignet sind als I-Polynome.

Eine für $\mathbb{F}$ bzgl. $W_1,..,W_n: \mathbb{F} \to \mathbb{I}$ berechenbare Approximation ist für jede Teilklasse $\mathbb{F}' \subset \mathbb{F}$ berechenbar bzgl. $W_1,..,W_n$. Allerdings ist eine bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F},W_1,..,W_n)$ beste (optimale) Approximation i.a. nicht mehr beste (optimale) Approximation für $\mathbb{F}' \subset \mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F}',W_1,..,W_n)$, vgl. [21].
Wegen 2.4.5 ist die Mittelwertsatz-Approximation T^1 noch beste Approximation für all jene Teilmengen $\mathbb{F}$ von C^1, die $T^1(\mathbb{F}) \subset \mathbb{F}$ erfüllen. Es gilt

Satz 3.5.8 (vgl. [21])

Die Mittelwertsatz-Approximation T^1 ist beste Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}(\mathbb{F},W_o,W_1)$ für die folgenden Teilklassen $\mathbb{F}$ von $C^1(M,\mathbb{I})$

(a) $\mathbb{F} = \{F \in C^1 \;/\; F(x_o) \subset F(x) \text{ für alle } x \in M\}$

(b) $\mathbb{F} = \{F \in C^1 \;/\; F(x_o) \subset F(x) \text{ für mindestens ein } x \in M\}$

(c) $\mathbb{F} = \{F \in C^1 \;/\; F(x) \subset F(y) \text{ für alle } x,y \in M \text{ mit } y < x \leq x_o \text{ bzw. } x_o \leq x < y\}$

(d) $\mathbb{F} = \{F \in C^1 \ / \lambda F(x_o) \leq \lambda F(x)$ für alle $x \in M\}$

(e) $\mathbb{F} = \{F \in C^1 \ / \lambda F(x_o) \leq \lambda F(x)$ für mindestens ein $x \in M\}$

(f) $\mathbb{F} = \{F \in C^1 \ / \lambda F(x) \leq \lambda F(y)$ für alle $x,y \in M$ mit $y \prec x \leq x_o$ bzw. $x_o \leq x \prec y\}$

(g) $\mathbb{F} = \mathbb{P}^1(M, \mathbb{I})$

(h) $\mathbb{F} = \{F \in C^1 \ / \ F' = \text{const.}\}$ $(\supset \mathbb{P}^1(M, \mathbb{I})!)$

4 Andere Formen der Mittelwertsatz-Approximationen für I-Funktionen

4.1 Überblick

Wir hatten in 3.5 festgestellt, daß die Mittelwertsatz-Approximation T^1 für C^1 berechenbar ist bzgl. gewisser Wertzuweisungen W_o, W_1, und daß T^1 beste Approximation für C^1 hinsichtlich der Klasse von Approximationen für C^1 ist, deren Elemente berechenbar sind bzgl. W_o und W_1.
Trotzdem sind die Einschließungsergebnisse nicht immer zufriedenstellend, vgl. das Beispiel nach 3.5.7. Ein Grund liegt darin, daß I-Polynome, mit denen ja in § 3 approximiert wird, nicht für alle Typen von I-Funktionen $F \in C^1$ als Einschließung geeignet sind, da sie mit zunehmender Entfernung vom Entwicklungspunkt x_o breiter werden. Dies legt es nahe, für solche I-Funktionen $F \in C^1$, die mit zunehmender Entfernung von x_o nicht breiter werden, d.h. $\lambda F(x) \leq \lambda F(x_o)$ für alle $x \in M$ erfüllen, nach brauchbareren optimalen Approximationen zu suchen.
In § 4 sollen die I-Funktionen $F \in C^1$, die mit zunehmender Entfernung vom Entwicklungspunkt nicht breiter werden, durch (einfacher zu berechnende) Funktionen approximiert werden, welche vom Typ her geeigneter sind als I-Polynome. Hierfür bieten sich zwei Wege an, je nachdem, welche Informationen über die zu approximierende Klasse man berücksichtigt. Beide weisen sowohl Vor- als auch Nachteile auf. Während man beim ersten Weg für die gesamte zugrunde liegende Klasse eine Einschließung konstruieren kann, ist dies beim zweiten Weg nur für eine Teilklasse möglich; dafür kommt man hier mit weniger Voraussetzungen aus und erhält schärfere Einschließungsaussagen.
Beide Formen der in § 4 zu entwickelnden Mittelwertsatz-Approximationen sind bekannt und wurden von Ratschek in [21] (für einen anderen Differenzierbarkeitsbegriff) hergeleitet. Man kann beide Formen auf I-Funktionen übertragen, die im Sinne von Markov differenzierbar sind. Bei der Form, die man durch Intervallzerlegung erhält, ergeben sich keine Veränderungen zu den Ergebnissen aus [21]. Daher soll diese auch nur kurz und ohne Beweis dargestellt werden. Die andere Form der Mittelwertsatz-Approximation beruht auf der Kenntnis des intervallarithmetischen Ausdrucks $\square F'$ (zur Definition vgl. § 4.2) und der Definition der Pseudoaddition $\dot{+}$. Hier ist es möglich, die Aussagen aus [21] zu verallgemeinern; u.a. kann die zugrunde liegende Klasse der zu approximierenden I-Funktionen wesentlich vergrößert werden.

In § 4.2 wird die aus der Intervallzerlegung resultierende Form R^1 der Mittelwertsatz-Approximation behandelt, und es werden Aussagen über die Einschließungsgüte gemacht. In [21] wird gezeigt, daß R^1 beste berechenbare Approximation für die Teilklasse $\tilde{G}^{1,1}$ der zugrunde liegenden Klasse $\tilde{C}^{1,1}$ ist (zur Definition vgl. § 4.2). R^1 ist auch berechenbar für $\tilde{C}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}$, es ist aber nicht bekannt, ob R^1 auch beste berechenbare Approximation für $\tilde{C}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}$ ist. Man kann aber zeigen, daß die Fortsetzung von R^1 auf eine unwesentliche Erweiterung von $\tilde{C}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}$ beste berechenbare Approximation für diese Erweiterung ist,vgl. 4.2.7.

In § 4.3 wird sodann die andere Form der Mittelwertsatz-Approximation hergeleitet und auf ihre Optimalität hin untersucht. Die in [21] geforderten Voraussetzungen werden abgeschwächt, und die Klasse der I-Funktionen, für die man mittels dieser Approximation eine Einschließung erhält, wird wesentlich vergrößert.

In § 4.4 wird gezeigt, daß unter den Voraussetzungen von § 4.2 insbesondere alle $F \in \tilde{G}^{1,1}$ (zur Definition vgl. § 4.2) eine Einschließung durch die in § 4.3 entwickelte Form der Mittelwertsatz-Approximation gestatten.

Abschließend werden dann in § 4.5 einige Aussagen über die Vergleichbarkeit der bisher entwickelten Approximationen für gegebenes $F \in C^1$ bzgl. der von der Inklusion induzierten Ordnung gemacht. Für gegebenes $F \in C^1$ ist es stets möglich anzugeben, welche unter den für F definierten Einschließungen die bestmögliche bzgl. der Ordnung $\leq$ ist.

4.2 Mittelwertsatz und Intervallzerlegung

Wie schon erwähnt, sind die Ergebnisse von 4.2 bekannt. Sie wurden (für einen anderen Differenzierbarkeitsbegriff für I-Funktionen) von Ratschek in [21] hergeleitet. Sie sollen an dieser Stelle aber trotzdem noch einmal kurz dargestellt werden, da einige der Aussagen in anderem Zusammenhang benötigt werden. Darüberhinaus sollen die Ergebnisse von 4.2 übertragen werden auf Taylor-Sätze für I-Funktionen, vergl. die Paragraphen 9 und 10.

Es sollen die I-Funktionen $F \in C^1$ betrachtet werden, die mit zunehmender Entfernung vom Entwicklungspunkt nicht breiter werden. Um für diese I-Funktionen bessere Einschließungen zu konstruieren als die in §3 erhaltenen, benötigt man noch zusätzlich die (reelle) Differenzierbarkeit der zugehörigen Randfunktionen.

In 4.2 sei stets $M \in \mathbb{I}$ und $x_o \in M$ fest. Die Klasse der I-Funktionen $F \in C^1(M, \mathbb{I})$, deren Randfunktionen (reell) differenzierbar sind in $\mathring{M} \setminus \{x_o\}$, werde mit $\tilde{C}^1(M, \mathbb{I})$ (kurz $\tilde{C}^1$) bezeichnet. Weiter sei

$$\tilde{C}^{1,1}(M, \mathbb{I}) = \{F \in \tilde{C}^1 \;/\; \lambda F(x) \leq \lambda F(x_o) \text{ für alle } x \in M\}.$$

Nach Konstruktion gilt also

$$\tilde{C}^{1,1} \subset \tilde{C}^1 \subset C^1 .$$

Die folgende Teilklasse von $\tilde{C}^{1,1}$ ist für uns noch von Interesse:
Man bezeichnet eine Abbildung $F: M \to \mathbb{I}$ (wobei es genügt, wenn M eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist) der Form

(1) $$F(x) = A \dot{+} (x-x_o)B, \quad A,B \in \mathbb{I},\ x \in M,\ \lambda((x-x_o)B) \leq \lambda A \text{ für alle } x \in M,$$

als 'verallgemeinertes I- Polynom 1-ten Grades um x_o'. Die Klasse dieser I-Funktionen werde mit $\mathbb{P}^1_{x_o\{1\}}(M, \mathbb{I})$ (kurz $\mathbb{P}^1_{x_o\{1\}}$) bezeichnet.
Wir hatten schon gezeigt, daß verallgemeinerte I-Polynome stetig differenzierbar sind. Weiter liest man aus (1) ab, daß für $F \in \mathbb{P}^1_{x_o\{1\}}$ die zugehörigen Randfunktionen Polynome sind, falls x_o Randpunkt von M ist, bzw. stückweise Polynome sind für $x \leq x_o$ und für $x \geq x_o$, falls $x_o \in \mathring{M}$. Also gilt auch $\mathbb{P}^1_{x_o\{1\}} \subset \tilde{C}^1$.
Sei $F \in \mathbb{P}^1_{x_o\{1\}}$ von der Form (1). Dann ist $\lambda F(x_o) = \lambda A$, und daher gilt nach Definition von $\mathbb{P}^1_{x_o\{1\}}$ $\lambda F(x_o) \geq \lambda F(x)$ für alle $x \in M$. Also gilt $\mathbb{P}^1_{x_o\{1\}} \subset \tilde{C}^{1,1}$.
Man beachte, daß $\mathbb{P}_{x_o} \cap \mathbb{P}^1_{x_o\{1\}} \neq \emptyset$ ist, denn alle I-Polynome F der Form $F(x) = A + (x-x_o)B$ mit $\lambda B = o$ sind aus diesem Durchschnitt.

In 4.2 soll mit Hilfe der Tatsache, daß jedes Intervall $A \in \mathbb{I}$ eindeutig in der Form

$$A = \varphi A + [-1,1]\,(\lambda A/2)$$

zerlegt werden kann (vgl. § 1.2), für Funktionen $F \in \widetilde{C}^{1,1}$ eine Form des Mittelwertsatzes konstruiert werden, die bessere Einschließungen vermittelt als der Operator T^1 aus § 3. Von Bedeutung sind daher insbesondere die Differenzierbarkeitseigenschaften der reellen Funktionen $\varphi F, \lambda F: M \to \mathbb{R}$, $F \in \widetilde{C}^{1,1}$, die definiert sind durch $(\varphi F)(x) = \varphi(F(x))$ und $(\lambda F)(x) = \lambda(F(x))$, $x \in M$. Für $F \in \widetilde{C}^{1,1}$ ist λF (reell) differenzierbar in $\mathring{M} \setminus \{x_o\}$, und es gilt $|(\lambda F)'| = \lambda F'$. $\lambda F'$ ist stetig auf M, da F' nach Voraussetzung stetig ist. Die Abbildung φF ist stetig differenzierbar in M für $F \in C^1$. Weiter gilt $(\varphi F)'(x) = \varphi F'(x)$ für alle $x \in M$. Für $F \in C^1$ ist $\varphi(F'(M)) \in \mathbb{R}$ nicht zu verwechseln mit $(\varphi F')(M) = \{\varphi F'(x) \;/\; x \in M\} \in \mathbb{I}$.

Es gilt die folgende Einschließungsaussage

Satz 4.2.1 (vergl. [21], Satz 6)
Sei $F \in \widetilde{C}^{1,1}(M, \mathbb{I})$. Dann ist $\varphi F'(M) \in \mathbb{I}$, das $\min_M \lambda F'(x)$ wird angenommen und der intervallarithmetische Ausdruck

$$(2) \qquad R^1F(x) = (F(x_o) + (x-x_o)\,\varphi F'(M)) \dot{+} (x-x_o)\,[-1,1] \min_M (\lambda F'(x)/2)$$

ist für alle $x \in M$ definiert. Weiter gilt für alle $x \in M$

$$(3) \qquad F(x) \subset R^1F(x) \quad \text{(d.h. es ist } F \leq R^1F).$$

Bemerkung 4.2.2
a) Man kann bei Satz 4.2.1 nicht auf die Forderung nach der Differenzierbarkeit der zugehörigen Randfunktion von F verzichten, vergl. [21], Bem.8.
b) Auch die Stetigkeit der Ableitungsfunktion F' ist notwendig, um die Existenz von $\min_M \lambda F'(x)$ und $\varphi F'(M) \in \mathbb{I}$ zu gewährleisten.

Für jedes $F \in \widetilde{C}^{1,1}$ erhält man durch (2) aus 4.2.1 eine I-Funktion $R^1F: M \to \mathbb{I}$, die man genauer charakterisieren kann. Für $A,B,C \in \mathbb{I}$ mit $\lambda(A+B) \geq \lambda C$ gilt

$$(A + B) \dot{+} C = \begin{cases} A \dot{+} (C \dot{+} B), & \text{falls } \lambda C \geq \lambda B, \\ A + (B \dot{+} C), & \text{falls } \lambda C < \lambda B. \end{cases}$$

Daher gilt dann für R^1F:

$$R^1F(x) = \begin{cases} F(x_o) \dot{+} (x-x_o)\,(\,[-1,1]\min_M (\lambda F'(x)/2) \dot{+} \varphi F'(M)), \\ \qquad\qquad \text{falls } \lambda(\varphi F'(M)) \leq \min_M \lambda F'(x) \\ F(x_o) + (x-x_o)\,(\varphi F'(M) \dot{+} [-1,1]\min_M (\lambda F'(x)/2)) \text{ sonst,} \end{cases}$$

d.h. für $F \in \widetilde{C}^{1,1}$ ist R^1F ein verallgemeinertes I-Polynom 1-ten Grades bzw. ein I-Polynom 1-ten Grades. Für $F \in \widetilde{C}^{1,1}$ ist $R^1F \in \widetilde{C}^{1,1}$ genau dann, wenn $\lambda(\varphi F'(M)) \leq \min_M \lambda F'(x)$ ist, denn I-Polynome F der Form $F(x)=A+(x-x_o)B$ mit $\lambda B > o$ gehören nicht zu $\widetilde{C}^{1,1}$.

Im Hinblick auf Optimalitätsaussagen interessiert nun besonders die folgende Teilklasse von $\widetilde{C}^{1,1}$

(4) $\quad \widetilde{G}^{1,1}(M, \mathbb{I}) = \{F \in \widetilde{C}^{1,1} \,/\, \lambda(\varphi F'(M)) \leq \min_M \lambda F'(x)\}$.

Seien W_o, W_2: $\widetilde{G}^{1,1} \to \mathbb{I}$ Wertzuweisungen mit $W_o(F) = F(x_o)$ und mit $W_2(F) = [-1,1]\min_M (\lambda F'(x)/2) \dot{+} \varphi F'(M)$. Sei J jene Teilmenge von $\mathbb{I}^2$, für deren Elemente (V_o, V_1) $\lambda V_o \geq |x-x_o|\, \lambda V_1$ gilt für alle $x \in M$, und sei α: $J \times M \to \mathbb{I}$ mit $(V_o, V_1, x) \longmapsto V_o \dot{+} (x-x_o)V_1$.

Dann ist die Einschränkung $\widetilde{R}^1$ von R^1: $\widetilde{C}^{1,1} \to \widetilde{C}^1$ auf $\widetilde{G}^{1,1}$ eine bzgl. der Wertzuweisungen W_o, W_2 und der I-Funktion α berechenbare Approximation für die Klasse $\widetilde{G}^{1,1}$, und es gilt die folgende Optimalitätsaussage

Satz 4.2.3 (vgl. [21], Satz 7)

Der Approximationsoperator $\widetilde{R}^1$ ist beste Approximation für die Klasse $\widetilde{G}^{1,1}$ hinsichtlich der Klasse aller Approximationen für $\widetilde{G}^{1,1}$, deren Elemente berechenbar sind bzgl. W_o und W_2, d.h. bzgl. $\mathcal{O}\ell(\widetilde{G}^{1,1}, W_o, W_2)$.

Bemerkung 4.2.4

Die Einschränkung $\overline{R}^1$ von R^1 auf $\widetilde{C}^{1,1} \setminus \widetilde{G}^{1,1}$ ist eine bzgl. der Wertzuweisungen W_o und W_3 berechenbare Approximation für $\widetilde{C}^{1,1} \setminus \widetilde{G}^{1,1}$, wobei für $F \in \widetilde{C}^{1,1} \setminus \widetilde{G}^{1,1}$ $W_o(F) = F(x_o)$ und $W_3(F) = \varphi F'(M) \dot{+} [-1,1]\min_M (\lambda F'(x)/2)$ ist. Da jedoch für $F \in \widetilde{C}^{1,1} \setminus \widetilde{G}^{1,1}$ $\overline{R}^1 F$ nicht zu $\widetilde{C}^{1,1} \setminus \widetilde{G}^{1,1}$ gehört, so kann mit Hilfe von 2.4.5 keine Optimalitätsaussage für $\overline{R}^1$ gemacht werden.

b) Die Approximation $\widetilde{R}^1$ ist nicht optimal unter allen Approximationen T: $\widetilde{G}^{1,1} \to \mathbb{P}^1_{x_o\{1\}}$, und daher erst recht nicht beste Approximation in diesem Sinne. Es ist leicht nachzuweisen, daß $\widetilde{R}^1$ nicht quasi-isoton ist. Das gleiche gilt für die Approximation $\overline{R}^1$.

Zum Abschluß von 4.2 soll anhand von zwei Beispielen veranschaulicht werden, wie sich die Einschließungsqualität von R^1F ändert, je nachdem, ob $F \in \widetilde{G}^{1,1}$

ist, oder ob $F \in \tilde{C}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}$ ist.

Beispiel 4.2.5

Sei $M = [1/2,1]$, $x_o = 1/2$ und sei $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \to [-1,1]\,(1/x)$.
Dann ist $F \in \tilde{C}^{1,1}$. Es ist $F'(x) = [-1,1]\,(1/x^2)$ und $\min_M \lambda F'(x) = 2$, $\Psi F'(M) = 0$. Also ist F Element von $\tilde{G}^{1,1}$.
Man erhält für $x \in M$

$$\tilde{R}^1 F(x) = [-(5/2) + x,\ (5/2) - x].$$

Beispiel 4.2.6

Sei $M = [1/4,1]$, $x_o = 1/4$ und $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [x, 1/x]$.
Dann ist $F \in \tilde{C}^{1,1}$. Weiter ist $F'(x) = [-(1/x^2), 1]$, $\min_M \lambda F'(x) = 2$ und $\Psi F'(M) = [-(15/2), 0]$. Also folgt $\min_M \lambda F'(x) < \lambda(\Psi F'(M))$ und daher $F \notin \tilde{G}^{1,1}$, d.h. $R^1 F$ ist jetzt ein I-Polynom. Man erhält

$$\tilde{R}^1 F(x) = [(15/8) - (13/2)x, (17/4) - x],\ x \in M.$$

Die beiden letzten Beispiele zeigen deutlich, daß die Approximation R^1 im Falle $F \in \tilde{G}^{1,1}$ zufriedenstellende Einschließungen liefert, für $F \in \tilde{C}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}$ hingegen nicht mehr.

Wie bereits angedeutet, gibt es eine andere Möglichkeit, um zu schärferen Einschließungsaussagen zu gelangen für I-Funktionen $F \in \tilde{C}^{1,1}$. Man erhält zwar keine Einschließungsaussage für die gesamte Klasse $\tilde{C}^{1,1}$, sondern nur für eine Teilklasse, dafür umfaßt diese aber $\tilde{G}^{1,1}$, und man kann zeigen, daß man bessere Ergebnisse erhält als die durch R^1 erzielten Einschließungen. Dies ist Thema von 4.3.

Es wurde bereits erwähnt, daß die Einschränkung $\bar{R}^1$ von R^1 auf $\hat{C}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}$ berechenbar ist bzgl. der Werte $F(x_o)$ und $\Psi F'(M) + [-1,1] \min_M \lambda F'(x)/2$, $F \in \tilde{C}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}$. Da jedoch $\bar{R}^1$ keine Abbildung von $\tilde{C}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}$ in sich ist, so sind für $\bar{R}^1$ keine Optimalitätsaussagen möglich. Man kann aber zeigen, daß die Erweiterung $\hat{R}^1$ von $\bar{R}^1$ auf eine geringfügige Erweiterung von $\tilde{C}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}$ beste berechenbare Approximation ist. (Daraus folgt natürlich nicht, daß $\bar{R}^1$ beste berechenbare Approximation ist, vgl. [21].)
Es sei zugrunde gelegt die Klasse $\tilde{C}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}$. Weiter sei $\mathbb{F} = (\tilde{C}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}) \cup \mathbb{P}^1_{x_o}$, wobei $\mathbb{P}^1_{x_o}$ die Klasse der I-Polynome 1-ten Grades um x_o $F: M \to \mathbb{I}$ bezeichne. $\mathbb{P}^1_{x_o}$ und $\tilde{C}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}$ sind disjunkt. Dennn die Abbildungen $F \in \tilde{C}^{1,1} \cap \mathbb{P}^1_{x_o}$ sind von der Form $F(x) = A + (x - x_o)b$, $x \in M$ und $b \in \mathbb{R}$, d.h. sie gehören zu $\tilde{G}^{1,1}$.

Man kann daher definieren: Sei $\hat{R}^1 : \mathbb{F} \to \tilde{C}^{1}$ mit

$$\hat{R}^1 F = \begin{cases} \bar{R}^1 F, & \text{falls } F \in \tilde{C}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}, \\ F & \text{sonst.} \end{cases}$$

Seien $W_o, \tilde{W}_3 : \mathbb{F} \to \mathbb{I}$ mit $W_o(F) = F(x_o)$ und $\tilde{W}_3(F) = \varphi F'(M) \oplus [-1,1] \min_M \lambda F'(x)/2$.
(Für $A, B \in \mathbb{I}$ ist $A \oplus B = A \dot{+} B$, falls $\lambda B \leq \lambda A$, und $A \oplus B = B \dot{+} A$ sonst, vgl. § 1.2.)
Dann ist $\hat{R}^1$ berechenbar bzgl. der Wertzuweisungen $W_o, \tilde{W}_3$ und der (rationalen) I-Funktion $\beta : \mathbb{I}^2 \times M \to \mathbb{I}$ mit $(A,B,x) \to A + (x - x_o)B$.
Sei zunächst $F \in \tilde{C}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}$, dann ist $\hat{R}^1 F = \bar{R}^1 F$, und es gilt die Behauptung.
Sei $F \in \mathbb{P}^1_{x_o}$, dann ist also $F(x) = A + (x - x_o)B$, $F' = B$, $\varphi F(M) = \varphi B$ und $\min_M \lambda F'(x) = \lambda B$. Dann ist $\varphi F'(M) \oplus [-1,1] \min_M \lambda F'(x)/2 = B$, und daher gilt $\hat{R}^1 F(x) = \beta(W_o(F), \tilde{W}_3(F), x)$ für alle $x \in M$.
Weiter gilt

Satz 4.2.7
$\hat{R}^1$ ist beste Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{O}\ell(\mathbb{F}, W_o, \tilde{W}_3)$.

Beweis. Wegen $\hat{R}^1 : \mathbb{F} \to \mathbb{P}^1_{x_o} \subset \mathbb{F}$ genügt es nach 2.4.5 $\tilde{W}_3(F) = \tilde{W}_3(\hat{R}^1 F)$ für alle $F \in \mathbb{F}$ zu zeigen.
Sei $F \in \mathbb{F}$, dann folgt $(\hat{R}^1 F)' \equiv \varphi F'(M) \oplus [-1,1] \min_M \lambda F'(x)/2$ und damit $\min_M \lambda (\hat{R}^1 F)'(x) = |\lambda(\varphi F'(M)) - \min_M \lambda F'(x)|$, $\varphi(\hat{R}^1 F)'(M) = \varphi(\varphi F'(M)) \in \mathbb{R}$.
Für $F \in \mathbb{P}^1_{x_o}$ ist $\varphi F'(M) = c$, $c \in \mathbb{R}$, und daher $\min_M \lambda (\hat{R}^1 F)'(x) = \min_M \lambda F'(x) - \lambda(\varphi F'(M))$. Damit folgt sofort die Behauptung.
Für $F \in \tilde{C}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}$ ist $\min_M \lambda (\hat{R}^1 F)(x) = \lambda(\varphi F'(M)) - \min_M \lambda F'(x)$, und daher folgt

$$\begin{aligned} \tilde{W}_3(\hat{R}^1 F) &= \varphi((\hat{R}^1 F)'(M)) \oplus [-1,1] \min_M \lambda (\hat{R}^1 F)'(x)/2 = \\ &= \varphi(\varphi F'(M)) \oplus [-1,1] (\lambda((\varphi F'(M)) - \min_M \lambda F'(x))/2 \\ &= \varphi F'(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F'(x)/2 = \tilde{W}_3(F). \end{aligned}$$

Also gilt die Behauptung.

Bemerkung 4.2.8
$\tilde{C}^1$ ist ein Unterraum des quasilinearen Raums C^1, $\tilde{C}^{1,1}$ ist ein Unterraum des quasilinearen Raums $\tilde{C}^1$. Weiter ist $\tilde{G}^{1,1}$ ein Unterraum von $\tilde{C}^{1,1}$.

4.3 Mittelwertsatz-Approximation und Pseudoaddition

In [21] konstruiert Ratschek für die Teilklasse $\mathcal{F}_2(M,\mathbb{I})$, $M\in\mathbb{I}$, der stetigen, stetig differenzierbaren I-Funktionen $F:M\to\mathbb{I}$, die wie folgt definiert ist:

'es ist $F:M\to\mathbb{I}$ aus $\mathcal{F}_2$ genau dann, wenn $F(y)\subset F(x)$ ist für alle $x,y\in M$ mit $|x-x_o|\leq|y-x_o|$, $x_o\in M$ fest'

eine Approximation $\gamma:\mathcal{F}_2\to\mathcal{F}_2$ mit $\gamma F(x) = F(x_o)\dot{+}(x-x_o)\bigcap F'$ für $F\in\mathcal{F}_2$ und $x\in M$. Dabei steht $\bigcap F'$ abkürzend für $\bigcap_M F'(x)$.

(Der in [21] zugrunde gelegte Ableitbarkeitsbegriff ist verschieden von dem in der vorliegenden Arbeit benutzten. I-Funktionen, die im Sinne von Ratschek differenzierbar sind, brauchen nicht stetig zu sein, vgl. [21]. Daher muß die Stetigkeit, falls benötigt, zusätzlich gefordert werden. Des weiteren muß man die Stetigkeit der Ableitungsfunktion einer im Sinne von Ratschek differenzierbaren I-Funktion fordern, damit die Eindeutigkeit der Ableitung gewährleistet ist, vgl. [21].)

Weiter wird in [21] gezeigt, daß γ beste berechenbare Approximation (bzgl. der Werte $F(x_o)$ und $\bigcap F'$) für $\mathcal{F}_2$ ist.

Diese Aussagen von [21] sollen in § 4.3 verallgemeinert werden. Setzt man den Ableitungsbegriff von Markov voraus (vgl. § 3), so kann man wieder auf die Stetigkeit der betrachteten I-Funktionen verzichten, da sie aus der Differenzierbarkeit folgt. Weiter kann man auf die Forderung nach der Stetigkeit der Ableitungsfunktion und auf $M\in\mathbb{I}$ (es genügt, wenn M eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist) verzichten.

Die I-Funktionen aus $\mathcal{F}_2$ haben insbesondere die folgenden Eigenschaften:

Sei $F\in\mathcal{F}_2$, dann gilt $\lambda F(x)\leq\lambda F(x_o)$ für alle $x\in M$, $\bigcap F'\neq\emptyset$, und die Randfunktionen von F sind (reell) differenzierbar in $\mathring{M}\setminus\{x_o\}$.

Dies legt die folgende Fragestellung nahe:

Welche I-Funktionen $F:M\to\mathbb{I}$, $M\subset\mathbb{R}$ konvex, mit den Eigenschaften

1) F ist differenzierbar (nach Markov) in $M\setminus\{x_o\}$, $x_o\in M$ fest,

2) die Randfunktionen von F sind reell differenzierbar in $\mathring{M}\setminus\{x_o\}$,

3) für alle $x\in M$ gilt $\lambda F(x)\leq\lambda F(x_o)$, 4) $\bigcap F'\neq\emptyset$,

gestatten eine Einschließung durch den arithmetischen Ausdruck $F(x_o)\dot{+}(x-x_o)\bigcap F'$ für alle $x\in M$, wobei natürlich auch vorausgesetzt ist, daß $F(x_o)\dot{+}(x-x_o)\bigcap F'$ definiert ist.

Die Klasse von I-Funktionen, die durch die Punkte 1) bis 4) ausgezeichnet ist, werde mit $\widetilde{C}^{(1,1)}\cap I^{(1)}$ bezeichnet (zur genauen Definition vgl. die nächste Seite). Die Teilklasse von $\widetilde{C}^{(1,1)}\cap I^{(1)}$, für die eine Einschließung der gewünschten Art möglich ist, werde mit $\widetilde{E}^{(1,1)}$ bezeichnet.

$\widetilde{E}^{(1,1)}$ ist echte Teilmenge von $\widetilde{C}^{(1,1)} \cap I^{(1)}$, d.h. nicht jedes $F \in \widetilde{C}^{(1,1)} \cap I^{(1)}$ gestattet eine Einschließung durch P^1F auf M, wobei P^1F definiert ist durch $P^1F(x) = F(x_o) \dot{+} (x-x_o)\bigwedge F'$, $x \in M$, vgl. 4.3.3.
Es werden hinreichende Kriterien angegeben, anhand derer man entscheiden kann, ob für gegebenes $F \in \widetilde{C}^{(1,1)} \cap I^{(1)}$ auch $F \in \widetilde{E}^{(1,1)}$ gilt.
Notwendig dafür, daß $F \in \widetilde{C}^{(1,1)} \cap I^{(1)}$ nicht zu $\widetilde{E}^{(1,1)}$ gehört, ist die Gültigkeit von $\lambda(\bigwedge F') = o$, vgl. 4.3.7. Diese Bedingung ist nicht hinreichend. Für $F \in \widetilde{C}^{(1,1)} \cap I^{(1)}$ mit $\lambda(\bigwedge F') = o$ muß daher, bis auf gewisse Ausnahmen, i.a. durch Nachrechnen entschieden werden, ob $F \in \widetilde{E}^{(1,1)}$ ist, oder nicht.
Unter den stärkeren Voraussetzungen von § 4.2 (Stetigkeit der Ableitung und $M \in \mathbb{IL}$) gilt die Inklusion $\widetilde{G}^{1,1} \subset \widetilde{E}^{1,1}$ ($\widetilde{E}^{1,1} = \widetilde{E}^{(1,1)} \cap \widetilde{C}^{1,1}$); d.h. für I-Funktionen $F \in \widetilde{C}^{1,1}$ mit $\lambda(\nabla F'(M)) \geq \min_M \lambda F'(x)$ gilt stets die Einschließung $F \leq P^1F$. Für $F \in \widetilde{C}^{1,1} \setminus \widetilde{G}^{1,1}$ ist i.a. $\bigwedge F' = \emptyset$. Falls $\bigwedge F' \neq \emptyset$ ist, so ist sowohl $F \in \widetilde{E}^{1,1}$ als auch $F \notin \widetilde{E}^{1,1}$ möglich, vgl. die folgenden Beispiele.

In ganz 4.3 sei stets M eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $x_o \in M$ fest.

Es sei $C^{(1)}(M, \mathbb{II}) = \{F \in C^0 \ / F \text{ ist differenzierbar in } M\setminus\{x_o\}\}$ und $\widetilde{C}^{(1)}(M, \mathbb{II}) = \{F \in C^{(1)} \ / \text{die Randfunktionen von } F \text{ sind differenzierbar in } \mathring{M}\setminus\{x_o\}\}$.
Weiter sei $\widetilde{C}^{(1,1)}(M, \mathbb{II}) = \{F \in \widetilde{C}^{(1)} \ / \lambda F(x) \leq \lambda F(x_o) \text{ für alle } x \in M\}$ und $I^{(1)}(M, \mathbb{II}) = \{F \in C^{(1)} \ / \bigcap F' \neq \emptyset\}$, wobei $\bigcap F'$ abkürzend für $\bigcap_{M\setminus[x]} F'(x)$ steht.

Bemerkung 4.3.1

a) Es ist $\widehat{C}^{1,1} \subset \widetilde{C}^{(1,1)}$, und falls $M \in \mathbb{II}$ ist, so ist R^1 eine Approximation für $\widetilde{C}^{1,1}$, nicht jedoch für $\widetilde{C}^{(1,1)}$ (vergl. 4.2.2).

b) Für $F \in I^{(1)}$ ist $\bigcap F' \in \mathbb{II}$, denn für jedes $x \in M\setminus\{x_o\}$ ist $F'(x)$ konvex und kompakt und daher hat auch $\bigcap F'$ diese Eigenschaften, d.h. ist aus $\mathbb{II}$.

In 4.3 soll nun für $\widetilde{C}^{(1,1)} \cap I^{(1)}$ bzw. für eine möglichst große Teilklasse von $\widetilde{C}^{(1,1)} \cap I^{(1)}$ ein Approximationsoperator P^1 konstruiert werden, wobei als Information über die zu approximierenden Funktionen die Werte $F(x_o)$ und $\bigcap F'$ eingehen.
Es ist natürlich anzunehmen, daß nicht für jedes $F \in \widetilde{C}^{(1,1)} \cap I^{(1)}$ eine Einschließung durch $F(x_o) \dot{+} \bigcap F'$, $x \in M$, möglich ist. Es soll daher zunächst untersucht werden, welche F solch eine Einschließung erlauben.

Satz 4.3.2

Sei $F \in \widetilde{C}^{(1,1)} \cap I^{(1)}$. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig

(a) Für alle $x \in M\setminus\{x_o\}$ gilt

$$\frac{F(x) \ominus F(x_o)}{x - x_o} > \bigcap F'.$$

(b) Für alle $x \in M$ ist der intervallarithmetische Ausdruck

$$P^1F(x) = F(x_o) \dot{+} (x - x_o) \bigcap F' \quad \text{definiert, und es gilt } F(x) \subset P^1F(x).$$

Beweis. Es gelte (b). Sei $F = [f,g]$. Dann erhält man für $x \in M\setminus\{x_o\}$ aus dem Mittelwertsatz für reelle Funktionen die Existenz von $\xi, \eta \in \overset{\circ}{x \vee x_o}$ mit $F(x) = [f(x), g(x)] = [f(x_o) + hf'(\xi),\ g(x_o) + hg'(\eta)]$, wobei $h = (x - x_o)$ ist. Da $F \in \widetilde{C}^{(1,1)}$ ist, so folgt wegen $\lambda F(x) \leq \lambda F(x_o)$ aus der letzten Gleichung $hf'(\xi) \geq hg'(\eta)$, und damit nach Definition der Pseudoaddition $\dot{+}$

$$(5) \qquad F(x) = F(x_o) \dot{+} h\big(g'(\eta) \vee f'(\xi)\big).$$

Wegen der für $A, B \in \mathbb{II}$ gültigen Identität $(A \dot{+} B) \ominus A = B$ $(\lambda B \leq \lambda A)$ erhält

man daher aus (5)

$$(6) \qquad \frac{F(x) \ominus F(x_o)}{x-x_o} = g'(\eta) \vee f'(\xi) \ .$$

Wegen der für $A,B,C \in \mathbb{I}$ gültigen Beziehung: $A \dot{+} B \subset A \dot{+} C$ genau dann, wenn $C \subset B$ ($\lambda B, \lambda C \leq \lambda A$), erhält man aus (6) zusammen mit (b)

$$\frac{F(x) \ominus F(x_o)}{x-x_o} \supset \bigcap F' \ .$$

Es gelte (a). Sei $x \in M$ und $x \neq x_o$. Zerlegt man $F(x)$ genauso wie in (5), so erhält man wegen (6) aus den Voraussetzungen sofort $g'(\eta) \vee f'(\xi) \supset \bigcap F'$. Wegen $\lambda(\bigcap F') \leq \lambda(g'(\eta) \vee f'(\xi))$ ist daher der Ausdruck $F(x_o) \dot{+} (x-x_o) \bigcap F'$ definiert . Die Gültigkeit von $P^1F(x) \supset F(x)$ folgt nun sofort wegen der Beziehung: Falls $C \subset B$, so ist $A \dot{+} B \subset A \dot{+} C$ (falls die Ausdrücke definiert sind).

Sei nun $\widetilde{E}^{(1,1)}$ jene Teilmenge von $\widetilde{C}^{(1,1)} \cap I^{(1)}$, deren Elemente F der Bedingung (a) von 4.3.2 genügen, d.h. es ist

$$\widetilde{E}^{(1,1)}(M, \mathbb{I}) = \{F \in \widetilde{C}^{(1,1)} \cap I^{(1)} \ / \bigcap F' \subset \frac{F(x) \ominus F(x_o)}{x-x_o} \text{ für alle } x \in M \setminus \{x_o\}\}.$$

Bemerkung 4.3.3

Es ist $\widetilde{E}^{(1,1)}$ echte Teilmenge von $\widetilde{C}^{(1,1)} \cap I^{(1)}$, d.h. nicht alle I-Funktionen $F \in \widetilde{C}^{(1,1)} \cap I^{(1)}$ lassen eine Einschließung der Form $F(x_o) \dot{+} (x-x_o) \bigcap F'$ zu.

Denn sei $M = [1/2, 1]$, $x_o = 1/2$ und $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [-x^3, 1/x]$.
Man rechnet leicht nach, daß $F \in \widetilde{C}^{1,1}$ ist. Es ist $F'(x) = -(3x^2 \vee (1/x^2))$ und $\emptyset \neq \bigcap F' = -\sqrt{3}$. Also ist auch $F \in I^{(1)}$. Da $\lambda \bigcap F' = 0$ ist, so ist auch der Ausdruck $F(x_o) \dot{+} (x-x_o) \bigcap F'$ definiert, und es gilt
$F(x_o) \dot{+} (x-x_o) \bigcap F' = [((4\sqrt{3}-1)/8) - \sqrt{3}\, x, ((4+\sqrt{3})/2) - \sqrt{3}\, x]$.
Es ist $F(1) = [-1, 1]$ und $F(x_o) \dot{+} (1-x_o) \bigcap F' = [a,b]$, wobei $-1 < a$ ist.
Also liefert der intervallarithmetische Ausdruck $F(x_o) \dot{+} (x-x_o) \bigcap F'$ keine Einschließung für F.

Bemerkung 4.3.4

Für $F \in \widetilde{E}^{(1,1)}$ ist P^1F ein verallgemeinertes I-Polynom 1-ten Grades, d.h. aus $\mathbb{P}^1_{x_o}\{1\}$. (Falls M unbeschränkt ist, so sind die Elemente $F \in \mathbb{P}^1_{x_o}\{1\}$ von der Form $F(x) = A \dot{+} (x-x_o) b$ mit $A \in \mathbb{I}$ und $b \in \mathbb{R}$, und in diesem Falle gilt

$\mathbb{P}^1_{x_o\{1\}} \subset \mathbb{P}^1_{x_o}$). Wir stellen weiter fest, daß $\mathbb{P}^1_{x_o\{1\}} \subset \widetilde{E}^{(1,1)}$ ist. Denn für $F \in \mathbb{P}^1_{x_o\{1\}}$ gilt ja $F'(x) = B \in \mathbb{I}$ für alle $x \in M$, und daher ist $\bigcap F' = B \neq \emptyset$. Weiter gilt für $F \in \mathbb{P}^1_{x_o\{1\}}$ mit $F(x) = A \dot{+} (x-x_o)B$, $x \in M \setminus \{x_o\}$

$$(7) \qquad \frac{F(x) \ominus F(x_o)}{x-x_o} = \frac{(A \dot{+} (x-x_o)B) \ominus A}{x-x_o} = B = \bigcap F'$$

Somit gilt die Behauptung nach 4.3.2.

Durch die Zuordnung $F \mapsto P^1F$, wobei P^1F durch (b) aus Satz 4.3.2 definiert ist, wird also ein Approximationsoperator $P^1: \widetilde{E}^{(1,1)} \longrightarrow \widetilde{E}^{(1,1)}$ definiert. Es ist $P^1(\widetilde{E}^{(1,1)}) = \mathbb{P}^1_{x_o\{1\}}$, und für $F \in \mathbb{P}^1_{x_o\{1\}}$ gilt wegen (7) $F = P^1F$.

Beispiel 4.3.5

Sei $M = [-1,1]$, $x_o = 0$, und sei $F: M \to \mathbb{I}$ definiert durch

$$F(x) = \begin{cases} [-1-x, 1+(1/2)x], & \text{falls } x < 0, \\ [-1,1] & \text{, falls } x = 0, \\ [-1+x, 1-(1/2)x], & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Dann ist F stetig in M und differenzierbar in $M \setminus \{x_o\}$ (in $x_o = 0$ existiert $F'(x_o)$ nicht), und es gilt

$$F'(x) = \begin{cases} [-1, 1/2], & \text{falls } x < 0, \\ [-1/2, 1], & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Weiter gilt $\bigcap F' = [-1/2, 1/2] \neq \emptyset$, und F erfüllt Bedingung (a) aus 4.3.2. Also ist $F \in \widetilde{E}^{(1,1)}$, und es gilt

$$P^1F(x) = F(x_o) \dot{+} (x-x_o) \bigcap F' = \begin{cases} [-1-(1/2)x, 1+(1/2)x], & \text{falls } x < 0, \\ [-1+(1/2)x, 1-(1/2)x], & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Beispiel 4.3.5'

Sei $M = [1/2, 1]$, $x_o = 1/2$ und $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [x, 1/x]$.

Dann ist $F \in \widetilde{C}^{(1,1)}$. Es ist $F'(x) = [-1/x^2, 1]$, daher folgt $\emptyset \neq \bigcap F' = [-1,1]$. Also ist auch $F \in I^{(1)}$. Mittels 4.3.6 (bzw. durch eine einfache Rechnung) weist man nach, daß $F \in \widetilde{E}^{(1,1)}$ ist. Es ist $F(x_o) = [1/2, 2]$ und $\bigcap F' = [-1,1]$; daraus erhält man dann nach Definition von $\dot{+}$ $P^1F(x) = [x, (5/2)-x]$, $x \in M$.

Da die Bedingung (a) aus Satz 4.3.2 für die Praxis wenig geeignet ist, sollen im folgenden Teilklassen von $C^{(1,1)} \cap I^{(1)}$ beschrieben werden, die gleichzeitig in $\widetilde{E}^{(1,1)}$ enthalten sind.

Es gilt:

Satz 4.3.6
Sei $F \in \widetilde{C}^{(1,1)}(M, \mathbb{I}) \cap I^{(1)}(M, \mathbb{I})$. Dann folgt:
(a) Falls $(\lambda F)'$ für $x < x_o$ bzw. für $x > x_o$ sein Vorzeichen nicht wechselt, dann ist $F \in \widetilde{E}^{(1,1)}$.
(b) Falls $\lambda(\bigcap F') > 0$ ist, dann gilt $F \in \widetilde{E}^{(1,1)}$.

Beweis. (a) Sei $F = [f,g]$. Wir betrachten den Fall $x \prec x_o$.
Aus der Voraussetzung folgt, daß $f'(x) \leq g'(x)$ für alle $x \prec x_o$ ist oder umgekehrt. Sei $x \in M$ und $x < x_o$. Aus dem Mittelwertsatz für reelle Funktionen erhält man dann die Existenz von $\xi, \eta \in (x, x_o)$, so daß gilt $F(x) = [f(x_o) + hf'(\xi), g(x_o) + hg'(\eta)]$ mit $h = (x - x_o)$. Da $F \in \widetilde{C}^{(1,1)}$ ist, so erhält man daraus $hg'(\eta) \leq hf'(\xi)$ und wegen $h < 0$ dann $f'(\xi) \leq g'(\eta)$. Daraus erhält man nun, daß für $x \in M$ mit $x \prec x_o$ $f'(x) \leq g'(x)$ gilt. Also kann man folgern $F(x) \subset F(x_o) \dotplus h(F'(\xi) \cap F'(\eta))$. Da $F \in I^{(1)}$ ist, so gilt auch $[f'(\xi), g'(\eta)] \supseteq \bigcap F'$, und daher Bedingung (a) aus Satz 4.3.2 für das gewählte x. Da $x \in M$ mit $x \prec x_o$ beliebig war, so gilt (a) aus 4.3.2 für alle $x \in M$ mit $x < x_o$. Genauso zeigt man, daß Bedingung (a) aus 4.3.2 auch für alle $x \in M$ mit $x > x_o$ gültig ist. Insgesamt folgt dann also, daß $F \in \widetilde{E}^{(1,1)}$ ist.

(b) Sei $\lambda(\bigcap F') > 0$. Angenommen, $(\lambda F)'$ würde für $x \prec x_o$ oder für $x > x_o$ sein Vorzeichen wechseln. Dann gäbe es wegen der Zwischenwerteigenschaft der Ableitung ein $x_1 < x_o$ bzw. ein $x_1 > x_o$ mit $(\lambda F)'(x_1) = 0$. Das wiederum wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung $\lambda(\bigcap F') > 0$. Also wechselt $(\lambda F)'$ für $x \prec x_o$ bzw. $x > x_o$ (und $x \in M$) sein Vorzeichen nicht. Damit folgt dann die Behauptung aus Teil (a) dieses Satzes.

Folgerung 4.3.7
(a) Sei $F \in C^{(1)}(M, \mathbb{I}) \cap I^{(1)}(M, \mathbb{I})$, und λF sei steigend für $x \prec x_o$ und fallend für $x > x_o$, dann ist $F \in \widetilde{E}^{(1,1)}(M, \mathbb{I})$.
(b) Für alle $F \in (\widetilde{C}^{(1,1)}(M, \mathbb{I}) \cap I^{(1)}(M, \mathbb{I})) \setminus \widetilde{E}^{(1,1)}(M, \mathbb{I}))$ gilt $\lambda(\bigcap F') = 0$.

Bemerkung 4.3.8
Falls ein $F \in C^{(1)}(M, \mathbb{I})$ die Monotoniebedingung aus 4.3.7(a) erfüllt, so braucht noch nicht zu gelten $F \in I^{(1)}$. Denn sei z.B. $M = [0,1]$, $x_o = 0$ und $F: M \to \mathbb{I}$ mit $F(x) = [x^2, x^2+1]$. Dann ist λF fallend auf M, aber es gilt $\bigcap F' = \emptyset$.

Es gilt folgende Verallgemeinerung von Satz 4 aus [21].

Hilfssatz 4.3.9

Sei $F \in C^{(1)}(M, \mathbb{I})$, und es gelte für alle $x,y \in M \setminus \{x_o\}$ mit $x_o < x < y$ bzw. $y < x < x_o$ die Inklusion $F(y) \subset F(x)$. Dann ist $F \in \tilde{E}^{(1,1)}$.

Beweis. Sei $F = [f,g]$. Nach Voraussetzung ist f steigend und g fallend für $x > x_o$ bzw. umgekehrt für $x < x_o$. Wegen Satz 3.2.8 sind also f und g differenzierbar in $M \setminus \{x_o\}$, und es gilt $\emptyset \neq \bigcap F' \supset o$. Damit folgt die Behauptung aus 4.3.7(a).

Bemerkung 4.3.10

Der arithmetische Ausdruck

$$F(x_o) \dot{+} (x-x_o)\bigcap F', \quad x \in M, \tag{8}$$

ist für jedes $F \in \tilde{C}^{(1,1)} \cap I^{(1)}$ definiert. Denn falls $\lambda(\bigcap F') > o$ ist, so ist $F \in \tilde{E}^{(1,1)}$ wegen 4.3.6(b). Ist dagegen $\lambda(\bigcap F') = o$, so ist auch $\lambda((x-x_o)\bigcap F') = o$ für alle $x \in M$, und dann ist (8) immer definiert. Man beachte jedoch, daß für $F \in \tilde{C}^{(1,1)} \cap I^{(1)}$ mit $\lambda(\bigcap F') = o$ der arithmetische Ausdruck (8) i.a. keine Einschließung für F ist (vgl. Bemerkung 4.3.3). Man muß dann jeweils für das vorliegende F überprüfen, ob mit (8) eine Einschließung für F vorliegt oder nicht.

Seien W_o, W_4: $\tilde{E}^{(1,1)} \to \mathbb{I}$ Wertzuweisungen für $\tilde{E}^{(1,1)}$, die wie folgt definiert sind: $W_o(F) = F(x_o)$ und $W_4(F) = \bigcap F'$. Weiter sei $\mathcal{X}$ jene Teilmenge von $\mathbb{I}^2$, für deren Elemente (V_o, V_1) $\lambda V_o \geq |x-x_o| \lambda V_1$ für alle $x \in M$ gilt. (Falls M unbeschränkt ist, dann gilt $\mathcal{X} = \mathbb{I} \times \mathbb{R}$.)
Sei $\alpha: \mathcal{X} \times M \to \mathbb{I}$ mit $(V_o, V_1, x) \mapsto V_o \dot{+} (x-x_o)V_1$.
Dann ist P^1 berechenbar bzgl. der Wertzuweisungen W_o, W_4 und der I-Funktion α. Es gilt die folgende Optimalitätsaussage.

Satz 4.3.11

P^1 ist beste Approximation für die Klasse $\tilde{E}^{(1,1)}(M, \mathbb{I})$ hinsichtlich jener Klasse von Approximationen für $\tilde{E}^{(1,1)}(M, \mathbb{I})$, deren Elemente berechenbar sind bzgl. W_o und W_4, d.h. bzgl. $\mathcal{O}(\tilde{E}^{(1,1)}, W_o, W_4)$.

Beweis. Wir hatten schon in 4.3.4 festgestellt, daß durch P^1 $\tilde{E}^{(1,1)}$ in sich abgebildet wird. Sei $F \in \tilde{E}^{(1,1)}$, dann ist offensichtlich $P^1F(x_o) = F(x_o)$. Weiter gilt $(P^1F)'(x) = \bigcap F'$. Also gilt $W_i(F) = W_i(P^1F)$ für i=o,4. Damit erhält man dann die Behauptung aus Satz 2.4.5.

4.4 Mittelwertsatz und Pseudoaddition bei Stetigkeit der Ableitung

In 4.4 sollen einige Beziehungen zwischen den Ergebnissen aus 4.2 und 4.3 hergeleitet werden. Für ganz 4.4 sei daher vorausgesetzt, daß $M = [a,b] \in \mathbb{I}$ und $x_o \in M$ fest ist. Weiter sei der Raum $\widetilde{C}^{1,1}(M, \mathbb{I}) \cap I^{(1)}(M, \mathbb{I})$ vorgegeben. Es gilt $\widetilde{C}^{1,1} \cap I^{(1)} \subset \widetilde{C}^{(1,1)} \cap I^{(1)}$. Mit Hilfe von für die Praxis leichter nachprüfbaren Kriterien sollen weitere Teilklassen von $\widetilde{E}^{1,1} \subset \widetilde{E}^{(1,1)}$ angegeben werden, wobei $\widetilde{E}^{1,1} = \widetilde{E}^{(1,1)} \cap \widetilde{C}^{1} \subset \widetilde{C}^{1,1}$ ist.

In 4.2 hatten wir schon die folgende Teilklasse von $\widetilde{C}^{1,1}$ betrachtet:

$\widetilde{G}^{1,1} = \{F \in \widetilde{C}^{1,1} / \min \lambda F'(x) \geq \lambda(\varphi F'(M))\}$.

Die Elemente $F \in \widetilde{G}^{1,1}$ haben die folgende Eigenschaft:

Satz 4.4.1

Für alle $F \in \widetilde{G}^{1,1}(M, \mathbb{I})$ ist $\bigcap F'$ nicht leer, und es gilt

(9) $\qquad [-1,1] \min_M (\lambda F'(x)/2) \dot{+} \varphi F'(M) \subset \bigcap F'$.

Beweis. Sei $F \in \widetilde{G}^{1,1}$ und $x \in M$ beliebig. Dann gilt wegen $\lambda(\varphi F'(x)) = 0$

$F'(x) = \varphi F'(x) + [-1,1](\lambda F'(x)/2) = [-1,1](\lambda F'(x)/2) \dot{+} \varphi F'(x)$.

Wegen $\min_M \lambda F'(x) \geq \lambda(\varphi F'(M))$ und der für Intervalle $A,B,C \in \mathbb{I}$ gültigen Beziehung

$A \dot{+} B \subset A \dot{+} C$ genau dann, wenn $B \supset C$ ist

erhält man daraus

$F'(x) \supset [-1,1] \min_M (\lambda F'(x)/2) \dot{+} \varphi F'(x) \supset [-1,1] \min_M (\lambda F'(x)/2) \dot{+} \varphi F'(M) \in \mathbb{I}$.

(Das $\min_M(\lambda F'(x)/2)$ wird angenommen, da F' stetig auf $M \in \mathbb{I}$ ist, aus dem gleichen Grund ist $\varphi F'(M) \in \mathbb{I}$.)

Die letzte Inklusion gilt nun für jedes $x \in M$, und die rechte Seite der Inklusion ist unabhängig von $x \in M$. Also folgt auch

$$\bigcap_{M \setminus \{x_o\}} F'(x) \supset [-1,1] \min_M (\lambda F'(x)/2) \dot{+} \varphi F'(M).$$

Folgerung 4.4.2

Es gilt die Inklusion $\widetilde{G}^{1,1}(M, \mathbb{I}) \subset \widetilde{C}^{1,1}(M, \mathbb{I}) \cap I^{(1)}(M, \mathbb{I})$.

Bemerkung 4.4.3

Für die Inklusion von 4.4.2 gilt keine Gleichheit, wie das folgende Beispiel zeigt.

Sei $M = [0, \pi/2]$, $x_o = \pi/4$ und $F: M \to \mathbb{I}$ mit $F(x) = [-\sin x, \cos x]$.

Es ist $\lambda F(x) \leq \lambda F(x_o)$ für alle $x \in M$, und daher folgt $F \in \widetilde{C}^{1,1}$. Weiter ist $F'(x) = -(\sin x) \vee (\cos x)$ und $\bigcap F' = -(1/\sqrt{2}) \neq \emptyset$. Also ist $F \in \widetilde{C}^{1,1} \cap I^{(1)}$.

Wegen $\varphi F'(M) = [-1/\sqrt{2},-1/2]$ ist $\lambda(\varphi F'(M)) > 0 = \min_M \lambda F'(x)$. Also ist F kein Element von $\tilde{G}^{1,1}$.

Mit 4.4.2 erhebt sich nun die Frage, ob auch $\tilde{G}^{1,1} \subset \tilde{E}^{1,1} (\subset \tilde{E}^{(1,1)})$ gilt. Man kann diese Frage positiv beantworten durch

Satz 4.4.4
Es gilt die Inklusion $\tilde{G}^{1,1}(M, \mathbb{R}) \subset \tilde{E}^{1,1}(M, \mathbb{R})$.

Beweis. Sei $F = [f,g]$ und $M = [a,b]$. Es ist noch zu zeigen, daß für $F \in \tilde{G}^{1,1}$ die Inklusion $F(x) \subset F(x_0) \dot{+} (x-x_0)\bigcap F'$, $x \in M$, gilt, denn wir hatten in 4.3.1o schon festgestellt, daß der arithmetische Ausdruck $F(x_0) \dot{+} (x-x_0)\bigcap F'$ für jedes $F \in \tilde{C}^{(1,1)} \cap I^{(1)}$ definiert ist.
Fallunterscheidung
1) Sei $\min_M \lambda F'(x) > 0$ und 1a) $\lambda(\bigcap F') > 0$. Dann wechselt $(\lambda F)'$ in $[a,x_0)$ und in $(x_0, b]$ nicht das Vorzeichen. Denn sonst müßte mit $\bigcap F' = [u,v]$ gelten: Es existieren $x,y \in (x_0,b]$ oder $x,y \in [a,x_0)$ mit $F'(x) = [f'(x),g'(x)]$ und $F'(y) = [g'(y),f'(y)]$. Wegen $F'(x) \supset \bigcap F' = [u,v]$ folgt dann daraus $f'(x) \leq u < v \leq f'(y)$. Nach der Zwischenwerteigenschaft der Ableitungsfunktion existiert dann für $c \in (u,v)$ ein $z \in x \vee y$ mit $f'(z) = c$. Das ist aber ein Widerspruch zu $F'(z) \supset \bigcap F'$. Man erhält nun die Behauptung analog zum Beweis von 4.3.6.
1b) Sei $\lambda(\bigcap F') = 0$, d.h. es ist $\bigcap F' = \underset{\cdot}{u}$, $u \in \mathbb{R}$. Wegen 4.4.1 gilt dann $\bigcap F' = \underset{\cdot}{u} = [-1,1] \min_M (\lambda F'(x)/2) \dot{+} \varphi F'(M) \in \mathbb{R}$.
Also gilt für diesen Fall $R^1F(x) = F(x_0) \dot{+} (x-x_0)\bigcap F' \supset F(x)$ für alle $x \in M$.
2) Sei $\min_M \lambda F'(x) = 0$. Wegen $\min_M \lambda F'(x) \geq \lambda(\varphi F'(M))$ erhält man daraus $\lambda(\varphi F'(M)) = 0$. Also existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\varphi F'(x) = c$ für alle $x \in M$. Weiter folgt aus $\min_M \lambda F'(x) = 0$ und der Stetigkeit von $\lambda F'$ die Existenz eines $z_0 \in M$ mit $\lambda F'(z_0) = 0$, d.h. es gilt $F'(z_0) = \underset{\cdot}{c}$. Also gilt $[-1,1] \min_M (\lambda F'(x)/2) \dot{+} \varphi F'(M) = \underset{\cdot}{c} = \bigcap F'$, und daher erhält man wie unter 1b) $R^1F(x) = F(x_0) \dot{+} (x-x_0)\bigcap F'$, und damit die Behauptung.

Bemerkung 4.4.5
Wie das folgende Beispiel zeigt, tritt für die Inklusion in 4.4.4 keine Gleichheit ein, d.h. es gibt $F \in \tilde{C}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}$ mit $F \in \tilde{E}^{1,1}$.
Sei $M = [1/4,1]$ und $F:M \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto [x,1/x]$. Dann ist $F'(x) = [-1/x^2,1]$ für alle $x \in M$, und daher folgt $\bigcap F' = [-1,1]$. Wegen 4.3.9 gilt $F \in \tilde{E}^{1,1}$.
Weiter gilt $\min_M \lambda F'(x) = 2 < \lambda(\varphi F'(M)) = 15/2$. Also ist $F \in \tilde{C}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}$.

4.5 Vergleich der verschiedenen Mittelwertsatz-Approximationen

In den Paragraphen 3 und 4 wurden verschiedene Formen der Mittelwertsatz-Approximation hergeleitet, die in der folgenden Tabelle noch einmal zusammengefaßt sind

Operator	Definitionsbereich	Bildbereich
T^1	$C^1(M, \mathbb{I})$, $M \in \mathbb{I}$	$\mathbb{P}^1_{x_o}(M, \mathbb{I})$
R^1	$\widetilde{C}^{1,1}(M, \mathbb{I})$, $M \in \mathbb{I}$	$\mathbb{P}^1_{x_o}(M, \mathbb{I}) \cup \mathbb{P}^1_{x_o\{1\}}(M, \mathbb{I})$
P^1	$\widetilde{E}^{(1,1)}(M, \mathbb{I})$, M konvexe Teilmenge von R	$\mathbb{P}^1_{x_o\{1\}}(M, \mathbb{I})$

Für F aus ihrem jeweiligen Definitionsbereich waren die Approximationen wie folgt definiert für $x \in M$:

$T^1F(x) = F(x_o) + (x-x_o)F'(M)$,

$R^1F(x) = F(x_o) + (x-x_o)([-1,1]\min_M(\lambda F'(x)/2) + \varphi F'(M))$, falls $F \in \widetilde{C}^{1,1}$ bzw.

$R^1F(x) = F(x_o) + (x-x_o)(\varphi F'(M) + [-1,1]\min_M(\lambda F'(x)/2))$ sonst,

$P^1F(x) = F(x_o) + (x-x_o)\cap F'$, wobei $\cap F'$ abkürzend für $\bigcap_{M \ni x} F'(x)$ steht.

In 4.5 sollen nun diese verschiedenen Formen von Approximationen für I-Funktionen bzgl. der von der Inklusion induzierten Ordnung verglichen werden, soweit dies möglich ist.

Zunächst sollen noch die intervallarithmetischen Hilfsmittel zusammengestellt werden

Hilfssatz 4.5.1

Für alle $A,B,C \in \mathbb{I}$ mit $\lambda B \leq \lambda A$ gilt

(a) Es ist $A \dot{+} B \subset A + C$ genau dann, wenn $B \cap C \neq \emptyset$.

(b) Es ist $A \dot{+} B = A + C$ genau dann, wenn $B = C = \underline{c}$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

(c) Falls $\lambda C \leq \lambda A$, dann ist $A \dot{+} B \subset A \dot{+} C$ genau dann, wenn $C \subset B$.

Vergleich von T^1 und R^1:

Sei $M \in \mathbb{I}$ und $x_o \in M$ fest. Dann kann man für $F \in \widetilde{C}^{1,1}(M, \mathbb{I})$ untersuchen, ob T^1F und R^1F vergleichbar sind bezüglich der Ordnung $\leq$, d.h. ob für alle

$x \in M$ $R^1F(x) \subset T^1F(x)$ gilt oder umgekehrt. Es erweist sich, daß R^1F und T^1F für jedes $F \in \tilde{C}^{1,1}$ vergleichbar sind, und es gilt

Satz 4.5.2

Für alle $F \in \tilde{C}^{1,1}(M, \mathbb{I})$ gilt $R^1F \leq T^1F$, und es besteht Gleichheit genau dann, wenn $F'(x) = \dot{c}$ für alle $x \in M$ (falls $F \in \tilde{G}^{1,1}$), bzw. wenn $\min_M \lambda F'(x) = o$ und $\varphi F'(M) = F'(M)$ (falls $F \in \tilde{C}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}$) ist.

Beweis.

Falls $F \in \tilde{G}^{1,1}$ ist, dann gilt nach 4.4.1 $\bigcap F' \supset [-1,1] \min_M (\lambda F'(x)/2) \dot{+} \varphi F'(M)$. Wegen $\bigcap F' \subset F'(M)$ folgt dann insbesondere

$$F'(M) \cap ([-1,1] \min_M (\lambda F'(x)/2) \dot{+} \varphi F'(M)) \neq \emptyset,$$

und man erhält aus HS 4.5.1,(a) $R^1F \leq T^1F$.

Falls $F \in \tilde{C}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}$ ist, so folgt wegen $\dot{o} \subset [-1,1] \min_M (\lambda F'(x)/2)$ aus 4.5.1 $\varphi F'(M) \dot{+} [-1,1] \min_M (\lambda F'(x)/2) \subset \varphi F'(M)$. Wegen $\varphi F'(M) \subset F'(M)$ erhält man dann die Behauptung aus 4.5.1.

Für $F \in \tilde{G}^{1,1}$ gelte $T^1F = R^1F$. Wegen 4.5.1 (b) existiert dann ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F'(M) = \dot{c}$, also ist $F'(x) = \dot{c}$ für alle $x \in M$. Falls umgekehrt $F' \equiv \dot{c}$ ist, dann ist erst recht $F'(M) = \dot{c}$ und $[-1,1] \min_M (\lambda F'(x)/2) \dot{+} \varphi F'(M) = \dot{c}$, und damit folgt aus der Form von T^1F und R^1F sofort die Gleichheit.

Sei nun $F \in \tilde{C}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}$, und es gelte $T^1F = R^1F$. Dann folgt sofort $F'(M) = \varphi F'(M) \dot{+} [-1,1] \min_M (\lambda F'(x)/2) \subset \varphi F'(M)$. Wegen $\varphi F'(M) \subset F'(M)$ folgt daraus $\min_M \lambda F(x) = o$ und $F'(M) = \varphi F'(M)$. Die Rückrichtung ist klar.

Vergleich von T^1 und P^1

Um P^1 und T^1 vergleichen zu können, benötigt man die Stetigkeit der Ableitung und die Forderung $M \in \mathbb{I}$. T^1 und P^1 haben den gemeinsamen Definitionsbereich $\tilde{E}^{1,1}$.

Satz 4.5.3

Sei $F \in \tilde{E}^{1,1}(M, \mathbb{I})$, dann gilt $P^1F \leq T^1F$, und die Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $F'(x) = \dot{c}$ ist für $c \in \mathbb{R}$ und für alle $x \in M$.

Beweis.

Wegen $\bigcap F' \subset F'(M)$ gilt $F'(M) \cap \bigcap F' \neq \emptyset$, und damit erhält man sofort aus 4.5.1 $P^1F \leq T^1F$. Den Rest der Behauptung erhält man sofort aus 4.5.1,(b).

Vergleich von R^1 und P^1

Sei $M \in \mathbb{I}$ und $x_o \in M$ fest. Dann ist $\tilde{E}^{(1,1)}(M, \mathbb{I}) \cap \tilde{C}^{1,1}(M, \mathbb{I}) = \tilde{E}^{1,1}(M, \mathbb{I})$ die

größtmögliche gemeinsame Teilmenge von $\tilde{E}^{(1,1)}$, $\tilde{C}^{1,1}$, auf der wir R^1 und P^1 auf Vergleichbarkeit untersuchen können. Es gilt

Satz 4.5.4

Für alle $F \in \tilde{G}^{1,1}(M, \mathbb{I})$ gilt $P^1F \leq R^1F$. Für $F \in \tilde{G}^{1,1}(M, \mathbb{I})$ tritt genau dann Gleichheit ein, wenn $\bigcap F' = [-1,1] \dot{+} \min_M (\lambda F'(x)/2) \dot{+} \varphi F'(M)$ ist. Für $F \in \tilde{E}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}$ gilt immer $P^1F \lneq R^1F$ (genauer: Für alle $x \in M$ mit $x \neq x_o$ ist $P^1F(x) \lneq R^1F(x)$).

Beweis. Sei $F \in \tilde{G}^{1,1}$, dann gilt nach Satz 4.4.1
$\bigcap F' \supset [-1,1] \dot{+} \min_M (\lambda F'(x)/2) \dot{+} \varphi F'(M)$, und damit erhält man aus der Definition von R^1 und P^1 die Behauptung aus HS 4.5.1, (c).
Sei nun $F \in \tilde{E}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}$, dann gilt also $\min_M \lambda F'(x) < \lambda(\varphi F'(M))$ und weiter
$R^1F(x) = F(x_o) + (x-x_o)(\varphi F'(M) \dot{+} [-1,1] \dot{+} \min_M (\lambda F'(x)/2))$.
Falls $\min_M \lambda F'(x) = o$ ist, dann $\varphi F'(M) \supset \bigcap F'$, und daher erst recht $\bigcap F' \cap \varphi F'(M) \neq \emptyset$. Dann folgt die Behauptung aus 4.5.1(a).
Sei nun $\min_M \lambda F'(x) > o$. Wir zeigen, daß folgender Durchschnitt nicht leer ist
(1o) $\varphi F'(M) \dot{+} [-1,1] \dot{+} \min_M \lambda F'(x)/2 \cap \bigcap F'$.
Sei $\varphi F'(M) = [u,v]$, dann gilt
$\varphi F'(M) \dot{+} [-1,1] \dot{+} \min_M (\lambda F'(x)/2) = [u + \min_M (\lambda F'(x)/2), v - \min_M (\lambda F'(x)/2)]$.
Weiter gilt mit $F' = [f_1, g_1]$ wegen der Stetigkeit von F' auf $M \in \mathbb{I}$
$\bigcap F' = [\max_M f_1(x), \min_M g_1(x)]$.
Angenommen, der Durchschnitt (1o) ist leer, wir können o.B.d.A. annehmen, daß gilt $\min_M g_1(x) = g_1(z_o) < u + \min_M (\lambda F'(x)/2)$. Dann folgt
$g_1(z_o) - \min_M (\lambda F'(x)/2) < u$. Wegen $\min_M (\lambda F'(x)/2) \leq \lambda F'(z_o)/2$ folgt daher
$g_1(z_o) - \lambda F'(z_o)/2 \leq g_1(z_o) - \min_M (\lambda F'(x)/2) < u$. Andererseits ist aber
$g_1(z_o) - \lambda F'(z_o)/2 = \varphi F'(z_o)$. Also folgt insgesamt $\varphi F'(z_o) < u$.
Das ist aber ein Widerspruch zu $\varphi F'(M) = [u,v]$. Also ist der Durchschnitt (1o) nicht leer, und man erhält die Behauptung des Satzes aus 4.5.1(a).
Für $F \in \tilde{G}^{1,1}$ erkennt man aus der Definition von $\dot{+}$ sofort, daß die Gleichheit $R^1F = P^1F$ genau dann eintritt, wenn
$\bigcap F' = [-1,1] \dot{+} \min_M (\lambda F'(x)/2) \dot{+} \varphi F'(M)$ ist.
Sei $F \in \tilde{E}^{1,1} \setminus \tilde{G}^{1,1}$. Angenommen, es gibt ein $x \in M$ mit $x \neq x_o$ und mit $R^1F(x) = P^1F(x)$. Dann folgt aus 4.5.1, (b) $\varphi F'(M) \dot{+} [-1,1] \dot{+} \min_M (\lambda F'(x)/2) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Daraus erhält man $\min_M \lambda F'(x) = \lambda(\varphi F'(M))$, d.h. es ist $F \in \tilde{G}^{1,1}$; das ist aber ein Widerspruch.

Abschließend läßt sich also sagen, daß unter den drei möglichen Mittelwertsatzapproximationen für F P^1F die bestmögliche ist, vorausgesetzt, $F \in \tilde{E}^{(1,1)}$. Für $F \in \tilde{C}^{1,1} \setminus \tilde{E}^{1,1}$ ist R^1F die bestmögliche Einschließung.

5 Höhere Ableitungen für Intervall-Funktionen, Satz von Taylor, Optimalität der Taylor- Einschließungen

5.1 Überblick

In § 5 sollen höhere Ableitungen für I-Funktionen $F:M \to \mathbb{I}$, $M \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, definiert werden. Die Vorgehensweise ist dabei die gleiche wie bei reellen Abbildungen, d.h. höhere Ableitungen werden rekursiv definiert.

In § 5.2 werden zunächst höhere Ableitungen für I-Funktionen definiert und einige Beziehungen zwischen n-mal differenzierbaren Abbildungen und den zugehörigen Randfunktionen hergeleitet.

In § 5.3 wird untersucht, inwieweit sich die Rechenregeln aus § 3.4 auf höhere Ableitungen übertragen lassen. Es erweist sich, daß für n-mal differenzierbare I-Funktionen F,G auch (F+G), ($F \oplus G$), usw. n-mal differenzierbar sind. Allerdings sind die entsprechenden Regeln im Vergleich zu § 3.4 weniger gut überschaubar.

In § 5.4 wird der Satz von Taylor für I-Funktionen hergeleitet. Hierzu benötigt man nicht die reelle Differenzierbarkeit der Randfunktionen, man kommt mit dem in § 5.2 definierten Ableitungsbegriff aus.

Für $M \in \mathbb{I}$ erhält man aus dem Satz von Taylor die n Approximationen $T^{n,k}$, $k = 1,..,n$, für die Klasse $C^n(M,\mathbb{I})$ der n-mal stetig differenzierbaren I-Funktionen $F:M \to \mathbb{I}$. Dabei ist $T^{n,k}$ definiert durch $T^{n,k} = T^k \mid C^n$. Diese Einschließungen $T^{n,k}$ werden in § 5.5 auf Optimalität untersucht.

5.2 Höhere Ableitungen für Intervall-Funktionen

Genauso wie im Reellen kann man höhere Ableitungen für I-Funktionen rekursiv definieren. Der Einfachheit halber sollen als Definitionsbereich für die in 5.2 betrachteten I-Funktionen nur Intervalle aus $\mathbb{R}$ zugelassen sein.

Definition 5.2.1

Sei M ein Intervall aus $\mathbb{R}$ und $F: M \to \mathbb{I}$.

F heißt n-mal differenzierbar in $x_o \in M$, falls eine Umgebung $U_\delta(x_o)$ von x_o und n-1 I-Funktionen $F'_1,..,F'_{n-1}: U_\delta(x_o) \cap M \to \mathbb{I}$ existieren, für die gilt: $F_1,..,F_{n-2}$ sind differenzierbar in $U_\delta(x_o) \cap M$, es ist $F_1 = F'$, $F_2 = F'_1,..,$ $..,F_{n-1} = F'_{n-2}$ auf $U_\delta(x_o) \cap M$, und F_{n-1} ist differenzierbar in x_o.

F heißt n-mal differenzierbar in M, falls F für jedes $x \in M$ n-mal differenzierbar ist.

Bemerkung 5.2.2

Falls F n-mal differenzierbar ist in $x_o \in M$, so ist $F'_{n-1}(x_o)$ eindeutig durch F bestimmt. $F'_{n-1}(x_o)$ heißt dann n-te Ableitung von F in x_o und wird mit $F^{(n)}(x_o)$ bezeichnet.

Falls F n-mal differenzierbar ist in M, so heißt die Abbildung $F^{(n)}: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto F^{(n)}(x)$ n-te Ableitungsfunktion von F. Für $n = o$ ist $F^{(o)} = F$.

Ist F n-mal differenzierbar in $x_o \in M$, so existiert nach Definition die (n-1)-te Ableitung $F^{(n-1)}$ von F in einer Umgebung von x_o. Damit erhält man Existenz und Stetigkeit aller Ableitungen $F^{(k)}$ von F auf dieser Umgebung für $k = 1,..,n-2$.

Definition 5.2.3

Sei M ein Intervall von $\mathbb{R}$. Dann heißt $F: M \to \mathbb{I}$ n-mal stetig differenzierbar (in M), falls F n-mal differenzierbar ist in M und $F^{(n)}$ stetig ist in M.

Die Menge der n-mal stetig differenzierbaren I-Funktionen $F: M \to \mathbb{I}$ wird mit $C^n(M, \mathbb{I})$ bezeichnet. Wir werden dafür auch kurz C^n schreiben, wenn klar ist, welches Intervall M zugrunde liegt.

Man kann die Ergebnisse aus § 3 über die erste Ableitung von I-Funktionen übertragen auf höhere Ableitungen. Im folgenden sei stets M ein Intervall aus $\mathbb{R}$.

Es gilt folgender

Satz 5.2.4

Seien $f,g: M \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar in M. Dann ist die durch $F = f \vee g: M \to \mathbb{I}$ definierte I-Funktion F n-mal differenzierbar in M, und es gilt $F^{(n)} = f^{(n)} \vee g^{(n)}$.

Beweis. Der Beweis folgt durch Induktion über n und aus 3.2.6.

Folgerung 5.2.5

Sei $F = [f,g]: M \to \mathbb{I}$, und seien f,g n-mal differenzierbar in M. Dann ist auch F n-mal differenzierbar in M, und es gilt $F^{(n)} = f^{(n)} \vee g^{(n)}$.

Falls $F = [f,g]: M \to \mathbb{I}$ n-mal differenzierbar ist für $n > 1$, so brauchen die ersten Ableitungen der Randfunktionen f und g nicht zu existieren.

Beispiel 5.2.6

Sei $M = [-1, \ln 2]$ und $F: M \to \mathbb{I}$ mit

$$F(x) = \begin{cases} [x^3, e^x], & \text{falls } x \leq 0 \\ [e^x - 1, 1], & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Dann ist F 2-mal stetig differenzierbar in M. Die Randfunktionen von F sind nicht differenzierbar für $x_0 = 0$.

Satz 5.2.7

Sei $F = [f,g]: M \to \mathbb{I}$ n-mal differenzierbar in M, und sei $\rangle F^{(k)}$ monoton in M für $k = 0,..,n-1$. Dann sind auch f und g n-mal differenzierbar in M, und es gilt für jedes $k = 1,..,n$ entweder $F^{(k)} = [f^{(k)}, g^{(k)}]$ auf ganz M oder $F^{(k)} = [g^{(k)}, f^{(k)}]$ auf ganz M.

Beweis. Der Beweis folgt sofort aus Satz 3.2.8 und durch Induktion über n.

Für eine n-mal differenzierbare I-Funktion $F: M \to \mathbb{I}$ sei für $k = 0,..,n$ $F^{(k)} = [f_k, g_k]$. Für $k = 0$ ist $F^{(0)} = [f_0, g_0] = F = [f,g]$.
Wir hatten für reelle Abbildungen $f: M \to \mathbb{R}$ den Ausdruck $\varphi_f(x)$, $x \in M$ und $x \neq x_0$, als Abkürzung für den Differenzenquotienten von f an der Stelle $x_0 \in M$ definiert.
Man kann nun mit Hilfe der Randfunktionen von $F^{(n-1)}$ die n-fache Differenzierbarkeit von F in einem Punkt x_0 beschreiben. Es gilt

Satz 5.2.8

Sei $F: M \to \mathbb{I}$ und $x_0 \in M$. Dann ist F n-mal differenzierbar in x_0 genau dann, wenn F (n-1)-mal differenzierbar ist in einer Umgebung $U_\delta(x_0) \cap M$ von x_0 und wenn für die Randfunktionen von $F^{(n-1)} = [f_{n-1}, g_{n-1}]$ gilt:

Es existieren $u,v \in \mathbb{R}$ mit $u \leq v$ und

1) $D_f^{*}(x_o)$, $D_g^{*}(x_o) \subset \{u,v\}$ mit $* \in \{+,-\}$ bzw. $* = +$ bzw. $* = -$, je nachdem, ob $x_o \in \mathring{M}$, x_o linker Randpunkt oder x_o rechter Randpunkt von M ist,

2) für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $U_\delta(x_o) \cap M$ mit $\lim x_n = x_o$ und $x_n < x_o$ bzw. $x_n > x_o$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Falls einer der beiden Limites $\lim \varphi_{f_{n-1}}(x_n)$ oder $\lim \varphi_{g_{n-1}}(x_n)$ existiert, dann existieren beide und sind verschieden, falls $u \neq v$ ist.

Beweis. Der Beweis folgt sofort aus 3.3.8.

Satz 5.2.9

Sei $F: M \to \mathbb{R}$ (n-1)-mal differenzierbar in einer Umgebung $U_\delta(x_o) \cap M$ von $x_o \in M$, und sei $F^{(n-1)}$ stetig dort. F ist genau dann n-mal differenzierbar in x_o, wenn entweder $f'_{n-1}(x_o)$ und $g'_{n-1}(x_o)$ existieren (falls x_o kein Randpunkt von M ist), oder alle einseitigen Ableitungen von f_{n-1} und g_{n-1} in x_o existieren und $(f_{n-1})'_+(x_o) = (g_{n-1})'_-(x_o)$, $(f_{n-1})'_-(x_o) = (g_{n-1})'_+(x_o)$ gilt.
In diesem Fall ist

$F^{(n)}(x_o) = f'_{n-1}(x_o) \vee g'_{n-1}(x_o)$, falls $x_o \in \mathring{M}$ und $f'_{n-1}(x_o)$, $g'_{n-1}(x_o)$ existieren,

$F^{(n)}(x_o) = (f_{n-1})'_+(x_o) \vee (f_{n-1})'_-(x_o) = (g_{n-1})'_+(x_o) \vee (g_{n-1})'_-(x_o)$

$= (f_{n-1})'_+(x_o) \vee (g_{n-1})'_+(x_o) = (f_{n-1})'_-(x_o) \vee (g_{n-1})'_-(x_o)$ sonst.

Beweis. Der Beweis ist eine direkte Folge aus 3.3.1o.

Folgerung 5.2.1o

Sei $F: M \to \mathbb{R}$. Dann ist F n-mal differenzierbar in M genau dann, wenn F (n-1)-mal stetig differenzierbar ist in M, und wenn für jedes $x \in M$ entweder $f'_{n-1}(x)$ und $g'_{n-1}(x)$ existieren oder die einseitigen Ableitungen von f_{n-1} und g_{n-1} in x existieren mit $(f_{n-1})'_+(x) = (g_{n-1})'_-(x)$ bzw. mit $(f_{n-1})'_-(x) = (g_{n-1})'_+(x)$.
Dann gelten für $F^{(n)}(x)$ die Gleichheiten aus 5.2.9.

Die Aussage 3.3.15 gilt i.a. nicht mehr für $n > 1$, d.h. die Randfunktionen einer n-mal differenzierbaren I-Funktion $F = [f,g]: M \to \mathbb{R}$ sind i.a. nicht mehr n-mal differenzierbar in $M \setminus A_F^n$, wobei A_F^n eine höchstens abzählbare Teilmenge von M ist. Dies hat zwei Gründe:
Zum einen folgt aus der Existenz der Ableitungen f' und g' in $M \setminus A_F$ (vgl. die Aussage 3.3.15) und der Stetigkeit von $F'|(M \setminus A_F) = f' \vee g'$ nicht die Stetigkeit von f' und g' in $M \setminus A_F$.
Zum andern ist die Ausnahmemenge A_F aus 3.3.15 i.a. nicht abgeschlossen in

M, in den Häufungspunkten $x_o \in \mathring{M}$ von A_F können dann keine 2-ten Ableitungen von f und g existieren. Die Frage nach der Existenz der 2-ten Ableitungen ist daher nur für die Menge $M \setminus \bar{A}_F$ sinnvoll, wobei $\bar{A}_F$ der Abschluß von A_F in M ist. Der Abschluß einer abzälbaren Menge ist aber i.a. nicht mehr abzählbar.

Aus 3.3.15 folgt der

Satz 5.2.11

Sei $F = [f,g]: M \longrightarrow \mathbb{I}$ n-mal differenzierbar in M. Dann gibt es für jedes $k \in \{1,..,n\}$ eine höchstens abzählbare Teilmenge A_F^k von M, so daß die Randfunktionen der (k-1)-ten Ableitung $F^{(k-1)} = [f_{k-1}, g_{k-1}]$ differenzierbar sind in $M \setminus A_F^k$. Die I-Funktionen $f'_{k-1} \vee g'_{k-1}: M \setminus A_F^k \longrightarrow \mathbb{I}$ sind (für $k < n$ stetig) fortsetzbar auf ganz M zur k-ten Ableitung $F^{(k)}$ von F.

5.3 Rechenregeln für höhere Ableitungen

Man kann die Rechenregeln für differenzierbare I-Funktionen übertragen auf höhere Ableitungen. Zunächst gilt der

Satz 5.3.1

Seien $F: M \to \mathbb{I}$ und $f: M \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar in M, und sei $A \in \mathbb{I}, \alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind die I-Funktionen (αF), Af, $(F+A), (F \oplus A), (F-A), (F \ominus A): M \to \mathbb{I}$ n-mal differenzierbar in M, und es gilt

a) $(\alpha F)^{(n)} = \alpha F^{(n)}$

b) $(Af)^{(n)} = A f^{(n)}$

c) $(F+A)^{(n)} = F^{(n)}$

d) $(F \oplus A)^{(n)} = F^{(n)}$

e) $(F-A)^{(n)} = F^{(n)}$

f) $(F \ominus A)^{(n)} = F^{(n)}$

Beweis. Der Beweis von 5.3.1 folgt aus 3.4.1 und Induktion über n.

Man kann auch die anderen Rechenregeln weitgehend übertragen (zur Definition der in den nächsten Aussagen benötigten Abbildung $\vee_F: M \to \mathbb{R}$, wobei $F: M \to \mathbb{I}$ differenzierbar ist, vergleiche § 3.4). Dann gilt:

Satz 5.3.2

Seien $F, G: M \to \mathbb{I}$ n-mal differenzierbar in M. Dann ist auch $(F+G)$ n-mal differenzierbar in M, und es gilt für alle $x \in M$

$$(F+G)^{(n)}(x) = \begin{cases} F^{(n)}(x)+G^{(n)}(x), & \text{falls } (F+G)^{(n-1)}(x)=F^{(n-1)}(x)+G^{(n-1)}(x) \\ & \text{und } \vee_{F^{(n-1)}}(x) = \vee_{G^{(n-1)}}(x) \\ & \text{oder } (F+G)^{(n-1)}(x)=F^{(n-1)}(x) \oplus G^{(n-1)}(x) \\ & \text{und } \vee_{F^{(n-1)}}(x) \neq \vee_{G^{(n-1)}}(x) \text{ ist,} \\ F^{(n)}(x) \oplus G^{(n)}(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Induktion nach n.

Für n=1 erhält man die Behauptung aus 3.4.2, denn es ist ja für alle $x \in M$ $(F+G)^{(o)}(x) = F^{(o)}(x)+G^{(o)}(x)$.

Die Behauptung sei richtig für $n > 1$. Es ist die Richtigkeit für $(n+1)$ zu zeigen.

Nach Voraussetzung ist F $(n+1)$-mal differenzierbar, also n-mal stetig differenzierbar in M.

Fallunterscheidung:

1) Es sei $(F+G)^{(n)}(x) = F^{(n)}(x)+G^{(n)}(x)$. Wegen Satz 3.4.2 existiert dann $(F+G)^{(n+1)}(x) = (F^{(n)}+G^{(n)})'(x)$, und es gilt

$$(F+G)^{(n+1)}(x) = \begin{cases} F^{(n+1)}(x)+G^{(n+1)}(x), & \text{falls } v_{F^{(n)}}(x) = v_{G^{(n)}}(x) \\ F^{(n+1)}(x) \oplus G^{(n+1)}(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

2) Es sei $(F+G)^{(n)}(x) = F^{(n)}(x) \oplus G^{(n)}(x)$. Jetzt existiert wegen 3.4.9 $(F+G)^{(n+1)}(x) = (F^{(n)}+G^{(n)})'(x)$ und es gilt

$$(F+G)^{(n+1)}(x) = \begin{cases} F^{(n+1)}(x) \oplus G^{(n+1)}(x), & \text{falls } v_{F^{(n)}}(x) = v_{G^{(n)}}(x) \\ F^{(n+1)}(x)+G^{(n+1)}(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus 1) und 2) folgt dann die Behauptung.

Beispiel 5.3.3

Sei M ein Intervall aus $\mathbb{R}$, $x_o \in M$ fest, und sei $F: M \to \mathbb{I}$ ein I-Polynom n-ten Grades um x_o, d.h. F ist von der Form (vgl. [18])

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k (x-x_o)^k, \quad A_k \in \mathbb{I}, \; x \in M.$$

Dann ist F beliebig oft stetig differenzierbar in M, und es gilt für alle $x \in M$

$$F^{(j)}(x) = \begin{cases} j!A_j + \sum_{k=j+1}^{n} (k!/(k-j)!)A_k (x-x_o)^{k-j}, & \text{falls } j < n \\ n!A_n, & \text{falls } j = n \\ 0, & \text{falls } j > n. \end{cases}$$

Insbesondere gilt $F^{(j)}(x_o) = j!A_j$, und man kann F daher in der folgenden Form schreiben

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} (F^{(k)}(x_o)/k!)(x-x_o)^k, \quad x \in M.$$

Für $n = 1$ war die Behauptung schon gezeigt worden, vergl. 3.4.5.
Man erhält nun die Behauptung für $n > 1$ durch Induktion über n unter Verwendung von 3.4.4 und der Monotonie von $\lambda F^{(k)}$ für $x \leq x_o$ bzw. $x \geq x_o$.

Satz 5.3.4

Seien $F,G: M \to \mathbb{I}$ n-mal differenzierbar in M, dann ist auch $(F \oplus G)$ n-mal differenzierbar in M und es gilt für alle $x \in M$

$$(F \oplus G)^{(n)}(x) = \begin{cases} F^{(n)}(x) \oplus G^{(n)}(x), & \text{falls} \\ (F \oplus G)^{(n-1)}(x) = F^{(n-1)}(x) \oplus G^{(n-1)}(x) & \text{und } v_{F^{(n-1)}}(x) = v_{G^{(n-1)}}(x) \\ \text{oder} & \\ (F \oplus G)^{(n-1)}(x) = F^{(n-1)}(x)+G^{(n-1)}(x) & \text{und } v_{F^{(n-1)}}(x) \neq v_{G^{(n-1)}}(x), \\ F^{(n)}(x)+G^{(n)}(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Der Beweis von 5.3.4 folgt mittels Induktion aus 3.4.9.

Beispiel 5.3.6

Sei M ein Intervall aus $\mathbb{R}$, $x_o \in M$, $K = \{n_1,..,n_r\} \subset \{1,..n\}$ für $n > 1$ und $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \longrightarrow (..(\sum_{\substack{k=0 \\ k \notin K}}^{n} A_k(x-x_o)^k) \dot{+} A_{n_1}(x-x_o)^{n_1}) \dot{+}..) \dot{+} A_{n_r}(x-x_o)^{n_r}$, wobei für alle $x \in M$ gilt

(1) $\lambda(\sum_{\substack{k=0 \\ k \notin K}}^{n} A_k(x-x_o)^k) \geq \lambda(\sum_{\substack{k=0 \\ k \in K}}^{n} A_k(x-x_o)^k)$.

Falls $K = \emptyset$ ist, dann ist (1) immer erfüllt, und F ist ein gewöhnliches I-Polynom n-ten Grades. Falls $K \neq \emptyset$ ist, dann heißt F 'verallgemeinertes I-Polynom n-ten Grades um x_o'.

Sei nun $K \neq \emptyset$, dann ist F n-mal differenzierbar in M, und es gilt für alle $x \in M$

$$F^{(k)}(x) = \begin{cases} F_1^{(k)}(x) \oplus F_2^{(k)}(x) & \text{, falls } k \leq n, \\ \underline{0} & \text{, falls } k > n, \end{cases}$$

wobei $F_1(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin K}}^{n} A_k(x-x_o)^k$ und $F_2(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \in K}}^{n} A_k(x-x_o)^k$ ist.

Insbesondere ist $F^{(k)}(x_o) = k!A_k$ für $k = 0,..,n$, und man kann F auch wie folgt darstellen für alle $x \in M$:

$$F(x) = (..(\sum_{\substack{k=0 \\ k \notin K}}^{n} (F^{(k)}(x_o)/k!)) \dot{+} (F^{(n_1)}(x_o)/n_1!) \dot{+}..) \dot{+} (F^{(n_r)}(x_o)/n_r!)$$

Aus der Definition für $\dot{+}$ bzw. für $\oplus$ folgt zunächst, daß man F mittels der Abbildungen F_1 und F_2 darstellen kann durch $F = F_1 \oplus F_2$.

Da höchstens für $x < x_o$ $v_{F_1}(x) \neq v_{F_2}(x)$ sein kann und in diesem Fall eines der beiden Intervalle $F_1'(x)$ oder $F_2'(x)$ ein Punktintervall sein muß, so existiert nach 3.4.9 $F'(x)$ für alle $x \in M$, und es gilt $F'(x) = F_1'(x) \oplus F_2'(x)$.

Man erhält nun die Behauptung durch Induktion.

Satz 5.3.7

Seien $F,G: M \to \mathbb{I}$ n-mal differenzierbar in M. Dann ist auch $(F \ominus G)$ n-mal differenzierbar in M, und es gilt für alle $x \in M$

$$(F \ominus G)^{(n)}(x) = \begin{cases} F^{(n)}(x) \ominus G^{(n)}(x), & \text{falls } (F \ominus G)^{(n-1)}(x) = \ldots \\ & \ldots = F^{(n-1)}(x) \ominus G^{(n-1)}(x) \text{ und} \\ & v_{F^{(n-1)}}(x) = v_{G^{(n-1)}}(x) \quad \text{oder} \\ & (F \ominus G)^{(n-1)}(x) = F^{(n-1)}(x) - G^{(n-1)}(x) \\ & \text{und } v_{F^{(n-1)}}(x) \neq v_{G^{(n-1)}}(x), \\ F^{(n)}(x) - G^{(n)}(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Der Beweis folgt aus 3.4.6 und durch Induktion über n.

Aus 3.4.12 erhält man mit Induktion folgende Aussage

Satz 5.3.8

Seien F,G n-mal differenzierbar in M. Dann ist auch (F-G) n-mal differenzierbar in M, und es gilt für alle $x \in M$

$$(F-G)^{(n)}(x) = \begin{cases} F^{(n)}(x) - G^{(n)}(x), & \text{falls } (F-G)^{(n-1)}(x) = F^{(n-1)}(x) - G^{(n-1)}(x) \\ & \text{und } v_{F^{(n-1)}}(x) = v_{G^{(n-1)}}(x) \quad \text{oder} \\ & (F-G)^{(n-1)}(x) = F^{(n-1)}(x) \ominus G^{(n-1)}(x) \text{ und} \\ & v_{F^{(n-1)}}(x) \neq v_{G^{(n-1)}}(x), \\ F^{(n)}(x) \ominus G^{(n)}(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 5.3.9

Sei $M = [-1,1]$ und seien $F,G: M \to \mathbb{I}$ mit $F(x) = [0,x^2]$, $G(x) = [x, x^2+1]$. Dann sind F und G 2-mal differenzierbar in M, und es ist $F'(x) = 0 \vee 2x$, $G'(x) = 1 \vee 2x$. Nun gilt

$$v_F(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 0 \\ 0, & \text{falls } x < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad v_G(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 1/2 \\ 0, & \text{falls } x < 1/2. \end{cases}$$

Also gilt $v_F(x) = v_G(x)$ für $x \in [-1,0) \cup [1/2,1]$. Damit erhält man aus 5.3.8

$$(F-G)'(x) = \begin{cases} F'(x) - G'(x), & \text{falls } x \in [-1,0) \cup [1/2,1] \\ F'(x) \ominus G'(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

Weiter ist $F''(x) = [0,2] = G''(x)$ für alle $x \in M$. Wegen $v_{F'} = v_{G'}$ auf $[-1,0) \cup [1/2,1]$ und $v_{F'} \neq v_{G'}$ auf $[0,1/2)$ erhält man dann aus 5.3.8

$(F-G)''(x) = F''(x) - G''(x) = [0,2] - [0,2] = [-2,2]$.

Bemerkung 5.3.10

Man entnimmt 5.3.1 und 5.3.2, daß $\langle C^n(M,\mathbb{I}),+,\cdot \rangle$ ein quasilinearer Raum über $\mathbb{R}$ ist, wobei die Addition + und die skalare Multiplikation · wie üblich punktweise erklärt sind.

5.4 Der Satz von Taylor für Intervall-Funktionen

Man kann den Satz von Taylor für reelle Funktionen übertragen auf I-Funktionen. Dabei ist es nicht nötig, für die (reellen) Randfunktionen der betrachteten I-Funktionen F die reelle Differenzierbarkeit zu fordern, man kommt mit der in 3.2 bzw. in 5.2 eingeführten Differenzierbarkeit für I-Funktionen aus.

Hilfsatz 5.4.1

Seien $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig in $[a,b]$, g sei differenzierbar in (a,b), und es sei $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a,b)$. Dann existiert ein $c \in (a,b)$, so daß für alle $\alpha \in D^+f(c)$ und für alle $\beta \in D^-f(c)$

$$\frac{\beta}{g'(c)} \leq \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \leq \frac{\alpha}{g'(c)} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\alpha}{g'(c)} \leq \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \leq \frac{\beta}{g'(c)}$$

gilt.

Beweis. Der Beweis von 5.4.1 geht ähnlich wie der Beweis zum verallgemeinerten Mittelwertsatz für reelle Funktionen.

Bemerkung 5.4.2

Es gelten die Voraussetzungen von 5.4.1. Falls man dann zusätzlich die Existenz aller einseitigen Ableitungen von f in (a,b) fordert, so erhält man die Existenz eines $c \in (a,b)$, so daß gilt

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \in \frac{f'_+(c)}{g'(c)} \vee \frac{f'_-(c)}{g'(c)}$$

Satz 5.4.3

Sei M konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $F\colon M \to \mathbb{I}$ n-mal stetig differenzierbar in M, und $F^{(n+1)}$ existiere noch in $\mathring{M} \setminus \{x_o\}$, wobei $x_o \in M$ fest ist. Dann gilt

(1) Für jedes $x \in M$ existieren $\xi, \eta \in \overset{\circ}{x \vee x_o}$, so daß

$$F(x) \subset F(x_o) + (x-x_o)F'(x_o) + \ldots + (x-x_o)^n (F^{(n)}(x_o)/n!) + (x-x_o)^{n+1} (F^{(n+1)}(\xi) \vee F^{(n+1)}(\eta))/(n+1)!\,.$$

(2) Falls $M \in \mathbb{I}$ ist und $F \in C^{n+1}(M,\mathbb{I})$, dann ist $F^{(n+1)}(M) \in \mathbb{I}$, und für alle $x \in M$ gilt

$$F(x) \subset F(x_o) + \ldots + (x-x_o)^n (F^{(n)}(x_o)/n!) + (x-x_o)^{n+1} (F^{(n+1)}(M)/(n+1)!)\,.$$

Beweis. 1) Sei zunächst $x \in M \setminus \{x_o\}$ und $x > x_o$. Für $k = 1,..,n+1$ sei $F^{(k)} = [f_k, g_k]$. Weiter seien $r_o, k_o : [x_o, x] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$r_o(y) = f(y) - f(x_o) - hf_1(x_o) - .. - h^n(f_n(x_o)/n!)$,

$k_o(y) = g(y) - g(x_o) - hg_1(x_o) - .. - h^n(g_n(x_o)/n!)$, wobei $y \in [x_o, x]$ und $h = (y - x_o)$ ist. Dann gilt nach Definition von $\ominus$:

$$F(x) \ominus \{F(x_o) + (x-x_o)F'(x_o) + .. + (x-x_o)^n (F^{(n)}(x_o)/n!)\} = r_o(x) \vee k_o(x).$$

Es gelte etwa $r_o(x) \leq k_o(x)$.

Man kann weiter annehmen, daß $r_o \neq$ constant ist auf $[x_o, x]$. Denn sonst ist f ein Polynom für alle $y \in [x_o, x]$, und damit ist f (n+1)-mal differenzierbar in $[x_o, x]$. Wegen Satz 3.3.11 ist dann auch g (n+1)-mal differenzierbar in $[x_o, x]$, und man erhält dann die Behauptung aus dem Satz von Taylor für reelle Funktionen und aus der folgenden Tatsache:

Seien $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ für $i=1,..,n$, und es gelte $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n} b_i$. Dann gilt die Inklusion

$$\left[\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{n} b_i\right] \subset \sum_{i=1}^{n} a_i \vee b_i .$$

Da F differenzierbar ist in M, so sind r_o und k_o stetig in $[x_o, x]$, und in (x_o, x) existieren alle einseitigen Ableitungen. Die Abbildung $g: [x_o, x] \to \mathbb{R}$ mit $g(y) = (y - x_o)^{n+1}$ ist stetig in $[x_o, x]$ und differenzierbar in (x_o, x), und es ist $g' \neq 0$ dort. Weiter ist $g(x_o) = 0 = r_o(x_o)$. Wegen 5.4.2 existiert daher ein $c_1 \in (x_o, x)$ mit

$$(1) \quad \frac{r_o(x)}{g(x)} = \frac{r_o(x) - r_o(x_o)}{g(x) - g(x_o)} \in \frac{(r_o)'_+(c_1)}{(n+1)(c_1 - x_o)^n} \vee \frac{(r_o)'_-(c_1)}{(n+1)(c_1 - x_o)^n}$$

Angenommen etwa, f (und damit auch g) ist nicht differenzierbar in c_1. Dann ist $(r_o)'_{\pm}(c_1) = f'_{\pm}(c_1) - f_1(x_o) - .. - (c_1 - x_o)^{n-1}(f_n(x_o)/(n-1)!)$. Sei etwa $F'(c_1) = [f_1(c_1), g_1(c_1)] = [f'_+(c_1), f'_-(c_1)]$. Dann folgt also aus (1)

$(r_o)'_+(c_1)/(n+1)(c_1 - x_o)^n \leq r_o(x)/(x - x_o)^{n+1}$.

Sei nun $r_1 : [x_o, c_1] \to \mathbb{R}$ mit $r_1(y) = f_1(y) - f_1(x_o) - .. - (y - x_o)^{n-1}(f_n(x_o)/(n-1)!)$. Es ist $r_1(c_1) = (r_o)'_+(c_1)$ und $r_1(x_o) = 0$. Da $F' = [f_1, g_1]$ differenzierbar ist in M, so ist r_1 stetig in $[x_o, c_1]$, und in (x_o, c_1) existieren alle einseitigen Ableitungen von r_1.

Falls r_1 = constant ist auf $[x_o, c_1]$, so erhält man die Behauptung ähnlich wie für r_o.

Sei also $r_1 \neq$ constant, dann existiert wegen 5.4.2 ein $c_2 \in (x_o, c_1)$ mit

$$\frac{(r_o)'_+(c_1)}{(n+1)\,(c_1-x_o)^n} = \frac{r_1(c_1)-r_1(x_o)}{(n+1)\,(c_1-x_o)^n} \in \frac{(r_1)'_+(c_2)}{(n+1)\,n\,(c_2-x_o)^{n-1}} \vee \frac{(r_1)'_-(c_2)}{(n+1)\,n\,(c_2-x_o)^{n-1}} .$$

Sei etwa $F''(c_2) = \left[(f_1)'_-(c_2), (f_1)'_+(c_2)\right]$. Dann folgt also

$$\frac{(r_1)'_-(c_2)}{(n+1)\,n\,(c_2-x_o)} \leq \frac{r_1(c_1)}{(n+1)\,(c_1-x_o)} \leq \frac{r_o(x)}{(x-x_o)^{n+1}} .$$

Setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man nach insgesamt (n+1) Schritten die stetige Abbildung $r_n : [x_o, c_n] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $r_n(y) = f_n(y) - f_n(x_o)$ und die Gültigkeit von

$$\frac{r_n(c_n)}{(n+1)n..(c_n-x_o)} \leq \frac{r_o(x)}{(x-x_o)^{n+1}} ,$$

wobei $c_n \in (x_o, c_{n-1}) \subset (x_o, x)$ ist. Nach Voraussetzung existiert $F^{(n+1)}$ in $\mathring{M}\setminus\{x_o\}$. Also ist r_n stetig in $[x_o, c_n]$, und in (x_o, c_n) existieren alle einseitigen Ableitungen von r_n. Nochmaliges Anwenden von 5.4.2 liefert nun die Existenz eines $\xi \in (x_o, c_n)$ mit

$$\frac{f_{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \leq \frac{r_o(x)}{(x-x_o)^{n+1}} .$$

Damit ist gezeigt, daß zu jedem $x \in M$ mit $x > x_o$ ein $\xi \in (x_o, x)$ existiert, so daß gilt

$$(2) \qquad (x-x_o)^{n+1}\,\frac{f_{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \leq r_o(x) .$$

Genauso zeigt man die Existenz eines $\eta \in (x_o, x)$ mit

$$(3) \qquad (x-x_o)^{n+1}\,\frac{g_{n+1}(\eta)}{(n+1)!} \geq k_o(x) .$$

Aus (2) und (3) folgt nun

$$(4) \qquad [r_o(x), k_o(x)] \subset (x-x_o)^{n+1}\,\frac{F^{(n+1)}(\xi) \vee F^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} .$$

Nun folgt aus der Inklusion $A \ominus B \subset C$ stets $A \subset B + C$ für Intervalle A, B, C aus $\mathbb{I}$. Zusammen mit (4) folgt daraus die Behauptung für $x > x_o$.

Sei nun $x \in M\setminus\{x_o\}$ mit $x < x_o$, weiter werde angenommen, daß n gerade ist. In diesem Falle erhält man

$F(x) \in \{F(x_o) + (x-x_o)F'(x_o) + .. + (x-x_o)^n F^{(n)}(x_o)/n!\} = a_o(x) \vee b_o(x)$ mit $a_o, b_o : [x, x_o] \prec \mathbb{R}$ und $a_o(y) = f(y) - f(x_o) - (y-x_o)g_1(x_o) - .. - (y-x_o)^n f_n(x_o)/n!$, $b_o(y) = g(y) - g(x_o) - (y-x_o)f_1(x_o) - .. - (y-x_o)^n g_n(x_o)/n!$ für $y \in [x, x_o]$.

Man erhält nun die Behauptung wie für den Fall $x > x_o$ mit Hilfe von 5.4.2.

2) Falls $M \in \mathbb{I}$ ist, dann ist wegen der Stetigkeit von $F^{(n+1)}$ auch $F^{(n+1)}(M) \in \mathbb{I}$. Wegen $F^{(n+1)}(M) = \bigcup_M F^{(n+1)}(x)$ ist dann auch der Rest der Behauptung klar.

Für den Rest von § 5.4 sei stets $M \in \mathbb{I}$ und $x_o \in M$ fest. Dann wird für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 5.4.3 für die Klasse $C^n(M,\mathbb{I})$ der n-mal stetig differenzierbaren I-Funktionen $F:M \to \mathbb{I}$ ein Approximationsoperator T^n definiert durch

(5) $\quad T^n F(x) = F(x_o) + (x-x_o)F'(x_o) + \ldots + (x-x_o)^n F^{(n)}(M)/n!, x \in M.$

Für gegebenes $F \in C^n$ ist $T^n F$ ein I-Polynom n-ten Grades und als solches n-mal stetig differenzierbar (vgl. 5.3.3); T^n bildet daher die Klasse $C^n(M,\mathbb{I})$ in sich ab.

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ erhält man wegen $C^n \subset C^k$ für $k = 1,..,n-1$ neben der Taylor-Approximation n-ter Ordnung T^n zusätzlich die Taylor-Approximationen k-ter Ordnung T^k für C^n.

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ sei $T^k | C^n = T^{n,k}$ für $k = 1,..,n$, wobei $T^{n,n} = T^n$ vereinbart sei.

Für gegebenes $F \in C^n$, $n > 1$, stehen dann die n Approximationen $T^{n,k}F$ als Einschließung für F zur Verfügung. Dies wirft zusätzlich zur Frage nach der Berechenbarkeit und Optimalität der einzelnen $T^{n,k}$, $k = 1,..,n$, für C^n die Frage auf, wie sich die Einschließungsgüte von $T^{n,k}F$ ändert, wenn man den Index $k \in \{1,..,n\}$ variiert. Diese Fragestellung wird eingehender in § 6 behandelt.

Beispiel 5.4.5

Sei $M = [-1,1]$, $x_o = -1$ und $F:M \to \mathbb{I}$ mit

$$F(x) = \begin{cases} [x^3, e^x], & \text{falls } x \leq o \\ [x^2/2, x+1], & \text{falls } x > o. \end{cases}$$

F ist 2-mal stetig differenzierbar in M, und es gilt $F'(x) = e^x \vee 3x^2$ für $x \leq o$, $F'(x) = [x,1]$ für $x > o$, $F''(x) = [6x, e^x]$ für $x \leq o$, $F''(x) = [o,1]$ für $x > o$. Also ist $F \in C^2(M,\mathbb{I})$. Da $F'''(o)$ nicht existiert, so folgt weiter $F \notin C^3(M,\mathbb{I})$.

Man erhält als Taylor-Einschließung 2-ter Ordnung für F

$T^2F(x) = [(-4+(1/e)) + (-6+(1/e))x - 3x^2, ((7/2)+(1/e)) + 4x + (x^2/2)]$, $x \in M$.

Die Taylor-Einschließung 1-ter Ordnung für F ist gegeben durch

$T^{2,1}F(x) = T^1F(x) = [-1, (1/e) + 3 + 3x]$, $x \in M$.

Mit Hilfe von Methoden, die in § 6 entwickelt werden (oder direkt durch nachrechnen) kann man zeigen, daß $T^1F = T^{2,1}F$ und $T^2F = T^{2,2}F$ nicht vergleichbar sind bzgl. der von der Inklusion induzierten Ordnung $\leq$, d.h. es gilt $T^{2,1}F \,||\, T^{2,2}F$.

5.5 Optimaltät der Taylor-Approxmationen

In 5.5 sei stets $M \in \mathbb{I}$ und $x_o \in M$ fest.
Wir hatten in 5.4 festgestellt, daß der Satz von Taylor einen Approximationsoperator T^n für $C^n(M,\mathbb{I})$ definiert.
Seien die Wertzuweisungen $W_o,..,W_n : C^n \to \mathbb{I}$ wie folgt definiert:
$W_o(F) = F(x_o)$, $W_1(F) = F'(x_o)$,.., $W_{n-1}(F) = F^{(n-1)}(x_o)$, $W_n(F) = F^{(n)}(M)$, $F \in C^n$.
Dann ist die Approximation T^n berechenbar bzgl. der Werte $W_o,..,W_n$ und der (rationalen) I-Funktion $\alpha : \mathbb{I}^{n+1} \times M \to \mathbb{I}$, die für $(V_o,..,V_n,x) \in \mathbb{I}^{n+1} \times M$ definiert ist durch $\alpha(V_o,..,V_n,x) = V_o + (x-x_o)V_1 + ..+ (x-x_o)^n V_n/n!$.
Weiter gilt

Satz 5.5.1
Die Approximation T^n ist beste Approximation für $C^n(M,\mathbb{I})$ bzgl. $\mathfrak{A}(C^n, W_o,..,W_n)$.

Beweis. Es wurde bereits festgestellt, daß $T^n(C^n) \subset P^n$ ist, wobei $P^n(M,\mathbb{I})$ die Klasse aller I-Polynome n-ten Grades $F:M \to \mathbb{I}$ ist. Wegen 5.3.3 ist nun $P^n \subset C^n$, und daher bildet T^n die Klasse C^n in sich ab.
Aus den Differenzierbarkeitseigenschaften für I-Polynome (vgl. 5.3.3) erhält man weiter die Gültigkeit von $W_i(T^nF) = W_i(F)$ für alle $F \in C^n$ und für $i = o,..,n$. Daraus erhält man nun wegen 2.4.5 die Behauptung.

Bemerkung 5.5.2
Die Taylor-Approximation T^n ist nicht optimal für C^n bzgl. $\mathfrak{A}(C^n, T^n(C^n))$, denn sie ist nicht quasi-isoton, wie das folgende Beispiel zeigt:
Sei $M = [o,1]$, $x_o = o$ und seien $F,G \in C^n(M,\mathbb{I})$ mit $F(x) = [-1,1]x^{n+1}$, $G(x) = [-1,1]x^n$, $x \in M$.
Dann gilt $F \leq G$, wobei $\leq$ die durch die Inklusion induzierte Ordnung bezeichne. Weiter ist $T^nG = G$ und $T^nF = (n+1)G = (n+1)T^nG$. Also ist $T^nG \leq T^nF$ und $T^nG \neq T^nF$, d.h. T^n ist nicht quasi-isoton.

Mit $P^n(M,\mathbb{I})$ werde die Klasse aller I-Polynome $F:M \to \mathbb{I}$ n-ten Grades bezeichnet, mit $P^n_{x_o}(M,\mathbb{I})$ die Teilklasse aller I-Polynome um $x_o \in M$. Dann gilt:

Hilfssatz 5.5.3
Es gilt $T^n(C^n) = P^n_{x_o}$, und damit ist die Gleichheit $T^nF = F$ genau dann erfüllt für $F \in C^n$, wenn $F \in P^n_{x_o}$ ist.

Beweis. Nach Konstruktion von T^n ist $T^n(C^n) \subset P^n_{x_o}$. Umgekehrt ist für $F \in P^n_{x_o}$ wegen $W_i(T^nF) = W_i(F)$, $i = o,..,n$, stets $F = T^nF$.

Die Approximationen $T^{n,k}$, $k = 1,..,n-1$, für C^n sind berechenbar bzgl. der Wertzuweisungen $W_o^k,..,W_k^k : C^n \to \mathbb{I}$ mit $W_j^k(F) = F^{(j)}(x_o)$ für $j < k$ und $W_k^k(F) = F^{(k)}(M)$. Für $F \in C^n$ ist $T^{n,k}F \in \mathbb{P}^k(M,\mathbb{I})$, d.h. ein I-Polynom k-ten Grades. Somit bildet $T^{n,k}$ die Klasse C^n in sich ab und es gilt

Satz 5.5.4

Für jedes $k \in \{1,..,n\}$ ist $T^{n,k}$ beste Approximation für C^n bzgl. $\mathcal{U}(C^n, W_o^k,..,W_k^k)$.

Der Beweis von 5.5.4 erfolgt wieder mit Hilfe von 2.4.5.

Genauso wie für $k = n$ ist auch für $k < n$ keine der Approximationen $T^{n,k}$ optimal für C^n bzgl. $\mathcal{U}(C^n, T^{n,k}(C^n))$.
Für jedes $k \in \{1,..,n\}$ gilt $T^{n,k}(C^n) = \mathbb{P}^k_{x_o}$ (Klasse der I-Polynome k-ten Grades $F:M \to \mathbb{I}$ um x_o), und für $F \in C^n$ ist $T^{n,k}F = F$ genau dann, wenn $F \in \mathbb{P}^k_{x_o}$ ist.

Bemerkung 5.5.5

(a) 3.5.7 ist auch für $n > 1$ gültig, d.h. ein I-Polynom n-ten Grades um x_o läßt sich i.a. nicht umentwickeln in ein I-Polynom um $z_o \neq x_o$. Dies ist genau dann möglich, wenn $\lambda F = \text{const.}$ ist, d.h. wenn F von der Form $F(x) = A_o + (x-x_o)\dot{a}_1 + .. + (x-x_o)\dot{a}_n$ ist mit $A_o \in \mathbb{I}$, $a_1,..,a_n \in \mathbb{R}$.

(b) Ein I-Polynom n-ten Grades F hat die Eigenschaft $F^{(n+1)} = \underset{\cdot}{0}$. Falls umgekehrt für eine n-mal differenzierbare I-Funktion $F:M \to \mathbb{I}$ $F^{(k)} = \underset{\cdot}{0}$ ist für ein $k < n$, dann ist F (im Gegensatz zu reellen Abbildungen) i.a. kein I-Polynom vom Grade $< k$.
Denn sei z.B. $M = [o,2]$ und $F:M \to \mathbb{I}$ mit $F(x) = [-x,x]$ für $x \in [o,1]$ und $F(x) = [-2,2] \dot{+} [-x,x]$ für $x \in [1,2]$. Dann ist F beliebig oft stetig differenzierbar mit $F' = [-1,1]$, $F^{(k)} = \underset{\cdot}{0}$ für $2 \leq k$. F ist aber kein I-Polynom vom Grade < 2.
Es gilt aber: Falls F n-mal differenzierbar ist, so ist auch die Mittelpunktsfunktion $\mathring{F}$ n-mal (reell) differenzierbar und es gilt $(\mathring{F})^{(n)} = \mathring{F}^{(n)}$. Damit folgt:
Sei $F:M \to \mathbb{I}$ n-mal differenzierbar, und es gelte $F^{(k)} = \underset{\cdot}{0}$. Dann ist $(\mathring{F})^{(k)} = o$, und damit ist $(\mathring{F})$ ein (reelles) Polynom vom Grade $< k$, dieses werde etwa mit p_k bezeichnet. Mit $F = [f,g]$ kann man dann F auch wie folgt schreiben: $F = [-g+2p_k, g] = [f, -f+2p_k]$.

Wie bereits erwähnt, sind die Einschränkungen von berechenbaren Approximationen wieder berechenbar; dies gilt nicht mehr für beste berechenbare

Approximationen. Die $T^{n,k}$, $k = 1,..,n$, sind beste Approximationen für die folgenden Teilklassen $\mathbb{F}$ von C^n

Satz 5.5.6

Für jedes $k \in \{1,..,n\}$ gilt: $T^{n,k}$ ist beste Approximation für $\mathbb{F}$ bzgl. $\mathcal{OI}(\mathbb{F}, W_0^k, .., W_k^k)$ für die folgenden Teilklassen $\mathbb{F}$ von C^n:

(a) $\mathbb{F} = \{F \in C^n \;/\; F(x_0) \subset F(x)$ für alle $x \in M\}$

(b) $\mathbb{F} = \{F \in C^n \;/\; F(x_0) \subset F(x)$ für mindestens ein $x \in M\}$

(c) $\mathbb{F} = \{F \in C^n \;/\; F(x) \subset F(y)$ für alle $x,y \in M$ mit $y \prec x \preccurlyeq x_0$ bzw. $x_0 \preccurlyeq x \prec y\}$

(d) $\mathbb{F} = \{F \in C^n \;/\; \lambda F(x_0) \leq \lambda F(x)$ für alle $x \in M\}$

(e) $\mathbb{F} = \{F \in C^n \;/\; \lambda F(x_0) \leq \lambda F(x)$ für mindestens ein $x \in M\}$

(f) $\mathbb{F} = \{F \in C^n \;/\; \lambda F(x) \measuredangle \lambda F(y)$ für alle $x,y \in M$ mit $y \prec x \preccurlyeq x_0$ bzw. $x_0 \preccurlyeq x \prec y\}$

(g) $\mathbb{F} = \mathbb{P}^n(M, \mathbb{I})$

(h) $\mathbb{F} = \{F \in C^n \;/\; F^{(k+1)} = \underset{\cdot}{0}\}$ $(\supset \mathbb{P}^k(M, \mathbb{I})!)$

Der Beweis von 5.5.6 folgt wegen $T^{n,k}(\mathbb{F}) \subset \mathbb{F}$ sofort aus 2.4.5.

Auch Taylor-Approximationen höherer Ordnung bieten nicht immer zufriedenstellende Einschließungsergebnisse. Dies ist, ähnlich wie bei der Mittelwertsatz-Approximation (vgl. § 3.5), Anlaß dazu, für geeignet zu wählende Teilklassen von C^n nach besseren Einschließungen zu suchen.
Für $n > 1$ bietet sich noch eine andere Möglichkeit an: Für gegebenes $F \in C^n$ kann man zwischen den n Approximationen $T^{n,k}F$, $k = 1,..,n$, für F wählen. Es ist natürlich naheliegend, eine solche Einschließung $T^{n,k_0}F$, $k_0 \in \{1,..,n\}$, zu nehmen, die bzgl. der Inklusion möglichst gut ist, d.h. es wird gesucht ein minimales Element der geordneten Menge $\langle \{T^{n,1}F,..,T^{n,n}F\}, \leq \rangle$.
Dies ist Thema von § 6.

6 Minimalitätsbetrachtungen für die gewöhnlichen Taylor-Approximationen

6.1 Überblick

Die Beispiele in § 3.5 hatten gezeigt, daß trotz der Optimalitätsaussage für die Mittelwertsatz-Approximation T^1 diese nicht immer zufriedenstellende Einschließungsergebnisse liefert. Dies war Anlaß zur Verkleinerung der zugrunde liegenden Klasse C^1, wodurch dann auch z.T. wesentlich bessere Ergebnisse erzielt werden konnten (vgl. § 4.2 und § 4.3).
Für $n > 1$ sind die Taylor-Approximationen k-ter Ordnung $T^{n,k}$ beste berechenbare Approximationen für C^n für jedes $k = 1,..,n$ (vgl. 5.5.4). Allerdings ist auch jetzt die Einschließungsqualität für gewisse Typen von I-Funktionen $F \in C^n$ nicht befriedigend. Um schärfere Aussagen zu erzielen, bietet sich zunächst auch hier wieder die Möglichkeit an, für geeignete Teilklassen von C^n bessere Approximationen zu konstruieren. Eine andere Möglichkeit, die das Verkleinern der zugrunde liegenden Klasse vermeidet, ist die folgende:
Satz 5.5.4 besagt, daß für jedes feste $k \in \{1,..,n\}$ $T^{n,k}$ beste berechenbare Approximation für C^n ist. Diese Optimalitätsaussage berücksichtigt nicht die übrigen Approximationen $T^{n,j}$, $j \in \{1,..,n\}$ und $j \neq k$, da diese nicht zur Klasse $\mathcal{U}(C^n, W_o^k, .., W_k^k)$ gehören. Dies ist Anlaß zur Frage, wie sich für vorgegebenes $F \in C^n$ die Einschließungsqualität von $T^{n,k}F$ ändert, wenn k die Indexmenge $\{1,..,n\}$ durchläuft. Von Interesse wäre insbesondere auch, welche unter den $T^{n,k}F$, $k \in \{1,..,n\}$, eine für F bzgl. der Inklusion möglichst gute Einschließung liefern, d.h. es ist eine Entscheidungsvorschrift gesucht, mittels der man für jedes $F \in C^n$ ein minimales Element der geordneten Menge $\langle \{T^{n,1}F,..,T^{n,n}F\}, \leq \rangle$ erhält (es gibt mindestens eines, da die zugrunde liegende Menge endlich ist).
Dies ist Thema von § 6. Es wird ein Algorithmus konstruiert, der für jedes $F \in C^n$ ein minimales Element von $\langle \{T^{n,1}F,..,T^{n,n}F\}, \leq \rangle$ liefert.
Ein Vergleich der durch diese beiden Methoden erhaltenen Einschließungsaussagen zeigt, daß man durch Verkleinern der zugrunde liegenden Klasse C^n i.a. bessere Ergebnisse erhält (vgl. § 7 und § 9). Andererseits hat die zweitgenannte Methode den Vorteil, daß die Approximationsaussagen für eine umfangreichere Klasse von I-Funktionen gelten.

In § 6.2 wird zunächst anhand von Beispielen gezeigt, daß für $F \in C^n$ die Eigenschaft:
'$T^{n,k}{}_oF$ ist minimales Element von $\langle \{T^{n,1}F,..,T^{n,n}F\}, \leq \rangle$ (kurz: $T^{n,k}{}_oF$ ist minimal)'

abhängig von der speziellen Wahl von $F \in C^n$ ist, d.h. es gibt keinen festen Index $k_o \in \{1,..,n\}$, so daß $T^{n,k_o}F$ minimal ist für alle $F \in C^n$.
Sodann werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür hergeleitet, daß zwei Taylor-Approximationen $T^{n,k}F$, $T^{n,j}F$, $F \in C^n$ und $k,j \in \{1,..,n\}$ mit $k < j$, vergleichbar bzw. nicht vergleichbar sind bzgl. der von der Inklusion induzierten Ordnung $\leq$.
In § 6.3 wird anschließend mit Hilfe der Aussagen von § 6.2 ein Algorithmus (A) konstruiert, der für jedes $F \in C^n$ einen Index $k_o \in \{1,..,n\}$ liefert, so daß $T^{n,k_o}F$ minimal ist.

In § 6 sei stets $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $M = [a,b] \in \mathbb{I}$ und $x_o \in M$ fest.
Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird in § 6 statt $T^{n,k}F$, $F \in C^n$ und $k \in \{1,..,n\}$, kurz T^kF geschrieben (es ist $T^{n,k} = T^k | C^n$).

6.2 Kriterien für die Vergleichbarkeit von Taylor-Approximationen

Es soll zunächst gezeigt werden, daß die Eigenschaft einer Taylor-Approximation T^kF, $F\in C^n$, minimales Element von $\langle\{T^1F,\ldots,T^nF\},\leq\rangle$ zu sein, unabhängig von der Ordnung $k\in\{1,\ldots,n\}$ ist.

Beispiel 6.2.1

Sei $M=[0,1]$, $x_o=1$, $F:M\to\mathbb{I}$ mit $x\to[-1,1]\,x^3$, $n\in\mathbb{N}$ und $n\geq 2$.
F ist beliebig oft stetig differenzierbar in M, und es gilt

$$T^1F(x)=[-4+3x,\ 4-3x]\ ,\quad T^2F(x)=[-7+9x-3x^2,\ 7-9x+3x^2]\ ,\ x\in M\ .$$

Es ist $T^1F\leq T^2F$, und es gilt $T^1F\neq T^2F$.

Beispiel 6.2.2

Sei $M\in\mathbb{I}$, $x_o\in M$ fest und $F:M\to\mathbb{I}$ mit $x\longmapsto\sum_{k=0}^{n}(x-x_o)^kA_k$, $A_k\in\mathbb{I}$, $n\geq 2$.
Dann ist F Element von C^n, und es gilt nach Satz 5.4.3 $T^nF=F$.
Wegen Satz 5.4.3 gilt auch $F\leq T^{n-1}F$ und daher $T^nF\leq T^{n-1}F$.

Bemerkung 6.2.3

Die beiden Beispiele zeigen, daß man sowohl beim Übergang von T^kF zu $T^{k+1}F$ als auch beim Übergang von $T^{k+1}F$ zu T^kF eine Verbesserung der Einschließungsschärfe erzielen kann, insbesondere hängt also die Einschließungsgüte der T^kF, $k=1,..,n$, nicht von der Ordnung $k\in\{1,\ldots,n\}$ ab.
Die beiden Beispiele zeigen aber auch, daß es i.a. kein festes $k_o\in\{1,..,n\}$ gibt mit der Eigenschaft: $T^{k_o}F$ ist minimal für alle $F\in C^n$.

Natürlich brauchen zwei Taylor-Approximationen für ein $F\in C^n$ überhaupt nicht vergleichbar zu sein.

Beispiel 6.2.4

Sei $M=[-1,\ 0]$, $x_o=0$ und $F:M\to\mathbb{I}$ mit $x\to[x^3,\ e^x]$, $n\in\mathbb{N}$ und $n\geq 2$.
F ist beliebig oft differenzierbar in M, und man erhält:

$$T^1F(x)=[3x,\ 1]\ ,\quad T^2F(x)=[x-3x^2,\ 1+x^2/2]\ .$$

Dann gilt weder $T^1F\leq T^2F$ noch $T^2F\leq T^1F$, d.h. es gilt $T^1F\parallel T^2F$.

Sei nun $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, und sei $F\in C^n$ vorgegeben. In 6.2 soll untersucht werden, wann für die n Taylor-Approximationen T^kF, $k\in\{1,..,n\}$, von F einer der drei folgenden Fälle eintreten kann

(a) $T^kF\leq T^jF$, (b) $T^jF\leq T^kF$, (c) $T^kF\parallel T^jF$,

wobei k,j verschiedene Elemente aus $\{1,..,n\}$ sind.

Zum Beweis der nächsten Ergebnisse benötigt man folgenden

Hilfssatz 6.2.5

Seien $A,B,C \in \mathbb{I}$ und sei $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt:

$A+B \subset A+C$ genau dann, wenn $B \subset C$

und

$\mu A \subset \mu B$ genau dann, wenn $A \subset B$.

Für den Rest des Paragraphen sei stets $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$, weiter sei $M \in \mathbb{I}$ und $x_o \in M$ fest.

Satz 6.2.6

Sei $F \in C^n$, und sei $k \in \{1,..,n-1\}$ .Dann gilt:
Es ist $T^k F \leq T^{k+1} F$ genau dann,wenn gilt $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$.

Beweis. Setze zur Abkürzung für $x \in M$ $(x-x_o) = h$ und für $j \in \{1,\ldots,k\}$

$S^j(x) = \sum_{i=0}^{j-1} h^i \frac{F^{(i)}(x_o)}{i!}$, $x \in M$. Weiter sei etwa $x_o = a$.

Es gelte $T^k F \leq T^{k+1} F$. Dann gilt für alle $x \in M$ $T^k F(x) \subset T^{k+1} F(x)$, also

$$S^k(x) + h^k \frac{F^{(k)}(M)}{k!} \subset S^{k+1}(x) + h^{k+1} \frac{F^{(k+1)}(M)}{(k+1)!} .$$

Damit erhält man wegen HS 6.2.5

$$h^k \frac{F^{(k)}(M)}{k!} \subset h^k \frac{F^{(k)}(x_o)}{k!} + h^{k+1} \frac{F^{(k+1)}(M)}{(k+1)!},$$

woraus für $x \neq x_o$ mit HS 6.2.5

$$F^{(k)}(M) \subset F^{(k)}(x_o) + h \frac{F^{(k+1)}(M)}{k+1}$$

folgt. Aus der letzten Inklusion erhält man insbesondere die Gültigkeit von $\lambda F^{(k)}(M) - \lambda F^{(k)}(x_o) + |h| \lambda F^{(k+1)}(M)$ und daraus für $x \to x_o$ die Identität $\lambda F^{(k)}(M) = \lambda F^{(k)}(x_o)$. Aus dieser Gleichheit folgt wegen $F^{(k)}(x_o) \subset F^{(k)}(M)$ die Behauptung.

Umgekehrt sei nun $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$. Dann folgt für alle $x \in M$ $F^{(k)}(x) \subset F^{(k)}(x_o)$. Mit der Bezeichnung $F^{(k)} = [f_k, g_k]$ erhält man daraus

$$f_k(x) - f_k(x_o) \geq 0 \geq g_k(x) - g_k(x_o) \quad \text{für alle } x \in M.$$

Da die einseitigen Ableitungen von f_k und g_k in x_o existieren (vergl.

Satz 5.2.8), muß also gelten $(g_k')_+(x_o) \leq 0 \leq (f_k')_+(x_o)$ und daher

$$0 \subset F^{(k+1)}(x_o) \subset F^{(k+1)}(M).$$

Aus der letzten Inklusion folgt zusammen mit der Vorraussetzung aus HS 6.2.5

$$h^k \frac{F^{(k)}(M)}{k!} \subset h^k \frac{F^{(k)}(x_o)}{k!} + h^{k+1} \frac{F^{(k+1)}(M)}{(k+1)!}.$$

Addiert man auf beiden Seiten $S^k(x)$, so erhält man wegen der Isotonie der Intervall-Addition die Behauptung.

Beispiel 6.2.7

Sei $M = [-1, 1]$, $x_o = -1$ und sei $F: M \to \mathbb{I}$ gegeben durch $x \longrightarrow [x^3, x^2]$.
F ist beliebig oft differenzierbar in M. Wegen $F'(x) = 2x \vee 3x^2$ folgt $F'(x_o) = [-2,3] = F'(M)$, und die beiden Taylor-Einschließungen T^1F und T^2F von F sind nach 6.2.6 miteinander vergleichbar, und es gilt $T^1F \leq T^2F$.

Man kann Satz 6.2.6 verallgemeinern, zuvor noch folgender

Hilfssatz 6.2.8

Seien $A, B \in \mathbb{I}$ mit $A = [a_1, a_2]$ und $B = [b_1, b_2]$. Dann gilt:

(a) Folgende Aussagen sind gleichwertig:

(1) $A \cap B \neq \emptyset$

(2) $a_1 \leq b_2$ und $b_1 \leq a_2$

(3) $|\varphi(A) - \varphi(B)| \leq \lambda(A+B)/2$

(b) Es ist $0 \in (A+B)$ genau dann, wenn $(-A) \cap B \neq \emptyset$

Satz 6.2.9

Sei $F \in C^n$ und seien $k, j \in \{1, .., n\}$ mit $(k+1) < j$. Dann gilt:

Es ist $T^kF \leq T^jF$ genau dann, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind für alle $x \in M$:

(1) $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$,

(2) $(-F^{(k+1)}(x_o)) \cap ((x-x_o) \frac{F^{(k+2)}(x_o)}{(k+2)} + .. + (x-x_o)^{j-k-1} \frac{F^{(j)}(M)}{(k+2)\cdot..\cdot j}) \neq \emptyset$.

Beweis. Für $x \in M$ werden die folgenden Abkürzungen benutzt:

$$(x-x_o) = h, \quad S^k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} h^i \frac{F^{(i)}(x_o)}{i!}, \quad S_k^j(x) = \sum_{i=k}^{j-1} h^i \frac{F^{(i)}(x_o)}{i!}.$$

Es gelte $T^kF \leq T^jF$. Dann gilt für jedes $x \in M$:

$$S^k(x) + h^k \frac{F^{(k)}(M)}{k!} \subset S^j(x) + h^j \frac{F^{(j)}(M)}{j!}.$$

Daraus folgt wegen 6.2.5 die Inklusion

$$h^k \frac{F^{(k)}(M)}{k!} \subset S_k^j(x) + h^j \frac{F^{(j)}(M)}{j!}.$$

Für $x = x_o$ erhält man mit HS 6.2.5 daraus $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ und damit

$$F^{(k)}(M) \subset F^{(k)}(M) + (h \frac{F^{(k+1)}(x_o)}{k+1} + .. + h^{j-k} \frac{F^{(j)}(M)}{(k+1)..j}).$$

Wiederum aus HS 6.2.5 erhält man daraus

$$0 \subset (F^{(k+1)}(x_o) + (h \frac{F^{(k+2)}(x_o)}{(k+2)} + h^{j-k-1} \frac{F^{(j)}(M)}{(k+2)..j}).$$

Diese letzte Inklusion ist nach HS 6.2.8 gleichwertig zur Behauptung (2).

Es gelten (1) und (2) der Vorraussetzung. Aus (2) erhält man sofort mit HS 6.2.8 für alle $x \in M$

$$0 \subset (h^{k+1} \frac{F^{(k+1)}(x_o)}{(k+1)!} + .. + h^j \frac{F^{(j)}(M)}{j!}).$$

Wegen $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ erhält daraus mit HS 6.2.5 die Behauptung.

Satz 6.2.9 hat nun eine wichtige Folgerung.

Folgerung 6.2.1o

Sei $F \in C^n$, dann gilt:

Falls zu $k \in \{1,..,n-1\}$ ein $j \in \{1,..,n\}$, $k < j$, existiert mit $T^kF \not\leq T^jF$, dann gilt insbesondere $T^kF \leq T^{k+1}F$.

Gleichwertig dazu ist:

Falls für ein $k \in \{1,..,n-1\}$ $F^{(k)}(M) \neq F^{(k)}(x_o)$ ist, dann gibt es kein $j \in \{k+1,..,n\}$ mit $T^kF < T^jF$ (und dann ist T^kF maximales Element der geordneten Menge $\langle \{T^1F,..,T^nF\}, \leq \rangle$).

Zum Beweis des nächsten Satzes benötigt man den folgenden

Hilfssatz 6.2.11

(a) Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, und sei $m_1 \leq m_2$. Dann gilt für alle $A \in \mathbb{II}$ und für alle $m \in [m_1, m_2]$

$$mA \subset m_1 A \vee m_2 A.$$

(b) Für alle $A,B,C,D \in \mathbb{II}$ gilt

$$A + (B \vee C) \subset D \text{ genau dann, wenn } A + B \subset D \text{ und } A + C \subset D.$$

Nun ist man in der Lage, für das Eintreten des Falls $T^{k+1}F \leq T^kF$ folgende notwendigen und hinreichenden Bedingungen anzugeben

Satz 6.2.12

Sei $F \in C^n(M, \mathbb{II})$, $M = [a,b]$, $d_1 = a - x_o$, $d_2 = b - x_o$, und sei $k \in \{1,..,n-1\}$. Dann gilt:

Es ist $T^{k+1}F \leq T^kF$ genau dann, wenn die folgenden Inklusionen

$$d_i \frac{F^{(k+1)}(M)}{(k+1)} \subset F^{(k)}(M) \ominus F^{(k)}(x_o) \quad \text{für } i = 1,2 \text{ gelten.}$$

Beweis. Setzt man für $x \in M$ $x - x_o = h$, so folgt mit HS 6.2.5 aus $T^{k+1}F \leq T^kF$

$$h^k \frac{F^{(k)}(x_o)}{k!} + h^{k+1} \frac{F^{(k+1)}(M)}{(k+1)!} \subset h^k \frac{F^{(k)}(M)}{k!} \quad ,$$

woraus man durch nochmaliges Anwenden von HS 6.2.5

$$F^{(k)}(x_o) + (x - x_o) \frac{F^{(k+1)}(M)}{(k+1)} \subset F^{(k)}(M), \quad x \in M,$$

erhält. Nun gilt für alle $A,B,C \in \mathbb{II}$: Falls $A + B \subset C$, so ist auch $B \subset C \ominus A$. Zusammen mit der letzten Inklusion erhält man daraus

$$(x - x_o) \frac{F^{(k+1)}(M)}{(k+1)} \subset F^{(k)}(M) \ominus F^{(k)}(x_o) \quad , \quad x \in M.$$

Diese Inklusion gilt insbesondere für $x = a$ und $x = b$, also gilt die Behauptung.

Es gelte nun umgekehrt die Inklusion (1). Dann ist für $x \in M \setminus \{x_o\}$ $d = (x - x_o) \in [d_1, d_2]$. Aus HS 6.2.11 folgt daher

$$(x - x_o) F^{(k+1)}(M) \subset d_1 F^{(k+1)}(M) \vee d_2 F^{(k+1)}(M) \quad .$$

Für alle $A,B,C \in \mathbb{II}$ mit $\lambda B \geq \lambda C$ folgt aus $A \subset B \ominus C$ die Inklusion $A + C \subset B$.

Aus den Vorraussetzungen und aus HS 6.2.11 folgt daher

$$F^{(k)}(x_o) + \frac{d_1 F^{(k+1)}(M) \vee d_2 F^{(k+1)}(M)}{k+1} \subset F^{(k)}(M).$$

Aus den beiden letzten Inklusionen folgt zusammen mit der Isotonie der Intervalladdition

$$\frac{F^{(k)}(x_o)}{k!} + (x-x_o)\frac{F^{(k+1)}(M)}{(k+1)!} \subset \frac{F^{(k)}(M)}{k!}.$$

Die Behauptung folgt nun zusammen mit HS 6.2.5 aus der letzten Inklusion.

Aus HS 6.2.11 erhält man das

Korollar 6.2.13

Unter den Vorraussetzungen von Satz 6.2.12 gilt:

Es ist $T^{k+1}F \leq T^kF$ genau dann, wenn gilt

$$\frac{d_1 F^{(k+1)}(M) \vee d_2 F^{(k+1)}(M)}{k+1} \subset F^{(k)}(M) \ominus F^{(k)}(x_o).$$

Beispiel 6.2.14

Sei $M = [0,1]$, $x_o = 0$ und sei $F: M \to \mathbb{I}$ gegeben durch $x \mapsto [-x^3, e^x]$.
Dann ist F beliebig oft stetig differenzierbar in M. Es soll untersucht werden, ob $T^1F \geq T^2F$ eintritt. Mit den Bezeichnungen von Satz 6.2.12 ist $k = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = 1$. Weiter gilt $F'(x_o) = [0,1]$, $F'(M) = [-3,e]$, $F''(M) = [-6,e]$. Damit erhält man

$$\frac{d_1 F''(M) \vee d_2 F''(M)}{2} = \frac{0 \cdot [-6,e] \vee 1 \cdot [-6,e]}{2} = [-3, e/2] \subset F'(M) \ominus F'(x_o) =$$

$$= [-3, e-1] .$$

Also folgt aus Satz 6.2.12 bzw. aus Korollar 6.2.13 die Gültigkeit von $T^2F \leq T^1F$.

Es gilt folgende Verallgemeinerung von 6.2.12

Satz 6.2.15

Sei $F \in C^n$, und seien $k,j \in \{1,..,n\}$ mit $k < j$. Dann gilt $T^jF \leq T^kF$ genau dann, wenn für alle $x \in M \setminus \{x_o\}$ gilt (für $x \in M$ sei $h = (x-x_o)$)

$$h\frac{F^{(k+1)}(x_o)}{k+1} + .. + h^{j-k}\frac{F^{(j)}(M)}{(k+1)..j} \subset F^{(k)}(M) \ominus F^{(k)}(x_o).$$

Beweis. Falls $T^jF \leq T^kF$ gilt, so ist mit den Bezeichnungen zum Beweis von Satz 6.2.9 wegen HS 6.2.5

$$S_k^j(x) + h^j \frac{F^{(j)}(M)}{j!} \subset h^k \frac{F^{(k)}(M)}{k!} \quad , x \in M.$$

Aus HS 6.2.5 und wegen der Beziehung: Falls $A + B \subset C$, so ist $A \subset B \ominus C$ für alle $A,B,C \in I$, erhält man die Behauptung.
Falls (2) gilt, so erhält man wegen der für alle $A,B,C \in I$ gültigen Beziehung: Falls $A \subset B \ominus C$ und $\lambda B \leq \lambda C$, so gilt $A + C \subset B$ mit Hilfe von HS 6.2.5 sofort die Behauptung.

Beispiel 6.2.15'
Sei $M = [-1,1]$, $x_o = 0$ und $F:M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [x^4, 1/2 + x^4/2]$.
Es soll untersucht werden, ob $T^4F \leq T^2F$ bzw. $T^3F \leq T^1F$ gilt.
Mit den Bezeichnungen von Satz 6.2.15 ist $k = 2$ und $j = 4$. Weiter gilt $F''(M) = [0,12]$, $F''(x_o) = \underset{\cdot}{0}$, also $F''(M) \ominus F''(x_o) = [0,12]$, $F'''(x_o) = \underset{\cdot}{0}$, $F^{(4)}(M) = [12,24]$. Damit erhält man (vergl. Satz 6.2.15)

$$x \frac{F'''(x_o)}{3} + x^2 \frac{F^{(4)}(M)}{3 \cdot 4} = x^2[1,2] \subset F''(M) \ominus F''(x_o) = [0,12] .$$

Also gilt $T^4F \leq T^2F$.
Da $F^{(k)}(M) \neq F^{(k)}(x_o)$ ist für $k = 1,2,3$, so gilt übrigens nicht $T^kF \leq T^{k+1}F$ für $k = 1,2,3$.
Für $k = 1$, $j = 3$ erhält man wegen

$$x \frac{F''(x_o)}{2} + x^2 \frac{F'''(M)}{2 \cdot 3} = x^2 \cdot [0,4] \subset F'(M) \ominus F'(x_o) = [0,4] \quad , x \in M,$$

aus Satz 6.2.15 die Beziehung $T^3F \leq T^1F$.

Aus Satz 6.2.6 und aus Satz 6.2.12 erhält man die folgenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß für ein $F \in C^n$ die Taylor-Approximationen T^kF und $T^{k+1}F$ unvergleichbar sind

Satz 6.2.16
Sei $F \in C^n$, $M = [a,b]$, $k \in \{1,..,n-1\}$ und sei $d_1 = a - x_o$, $d_2 = b - x_o$.
Dann gilt $T^kF \parallel T^{k+1}F$ genau dann, wenn

(1) $F^{(k)}(M) \neq F^{(k)}(x_o)$,

(2) $d_i \frac{F^{(k+1)}(M)}{k+1} \not\subset F^{(k)}(M) \ominus F^{(k)}(x_o)$

für mindestens ein $i \in \{1,2\}$.

Beispiel 6.2.17

Sei $M = [-1,0]$, $x_o = 0$, $F:M \to \mathbb{I}$ gegeben durch $x \to [x^3, e^x]$.
Es soll untersucht werden, ob T^1F und T^2F vergleichbar sind.
Mit den Bezeichnungen von Satz 6.2.16 ist $k = 1$, $d_1 = -1$, $d_2 = 0$,
$F'(M) = [0,3]$, $F'(x_o) = [0,1]$ und $F''(M) = [-6,1]$.
Wegen $F'(M) \neq F'(x_o)$ gilt $T^1F \not\leq T^2F$.
Es ist $F'(M) \ominus F'(x_o) = [0,2]$ und $\lambda(d_1 \frac{F''(M)}{2}) = 7/2 > \lambda(F'(M) \ominus F'(x_o)) = 2$
Also kann nicht gelten

$$d_1 \frac{F''(M)}{2} \subset F'(M) \ominus F'(x_o).$$

Also folgt aus Satz 6.2.16 $T^1F \parallel T^2F$.

Über die Unvergleichbarkeit zweier nicht benachbarter Taylor-Approxima - tionen gilt der

Satz 6.2.17

Sei $F \in C^n$, und seien $k,j \in \{1,..,n\}$ mit $(k+1) < j$. Dann folgt:
Es ist $T^kF \parallel T^jF$ genau dann, wenn gilt:

(1) Es ist $F^{(k)}(M) \neq F^{(k)}(x_o)$ oder es gibt ein $x_1 \in M$ mit

$$-F^{(k+1)}(x_o) \cap (x_1-x_o)\frac{F^{(k+2)}(x_o)}{k+2} + ..+(x_1-x_o)^{j-k-1}\frac{F^{(j)}(M)}{(k+2)..j} = \emptyset,$$

(2) es gibt ein $x_2 \in M$ mit

$$(x_2-x_o)\frac{F^{(k+1)}(x_o)}{k+1} + ..+ (x_2-x_o)^{j-k}\frac{F^{(j)}(M)}{(k+2)..j} \not\subset F^{(k)}(M) \ominus F^{(k)}(x_o).$$

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 6.2.9 und Satz 6.2.15 .

Beispiel 6.2.18

Sei $M = [1/2,2]$, $x_o = 1/2$ und $F:M \to \mathbb{I}$ mit $x \to [\ln x, x^2]$.
Es soll untersucht werden, ob T^1F und T^3F vergleichbar sind.
Mit den Bezeichnungen von Satz 6.2.17 ist $k = 1$, $j = 3$, $F'(M) = [1/2,4]$,
$F'(x_o) = [1,2]$, $F''(x_o) = [-4,2] = F''(M)$ und $F'''(M) = [0,16]$.
Es ist $F'(M) \neq F'(x_o)$ und für $x_2 = 1$ gilt

$$(x_2-x_o)\frac{F''(x_o)}{2} + (x_2-x_o)^2\frac{F'''(M)}{2\cdot 3} = [-1,..] \not\subset F'(M) \ominus F'(x_o) = [-1/2,2].$$

Also gilt $T^1F \parallel T^3F$.

6.3 Ein Algorithmus zur Angabe eines minimalen Elementes

In ganz 6.3 sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $M = [a,b] \in \mathbb{I}$ und $x_o \in M$.
Für $F \in C^n(M, \mathbb{I})$ (kurz C^n) ist die Menge der Taylor- Approximationen T^kF, $k = 1,..,n$, endlich, also existiert ein minimales Element der Menge $\langle \{T^kF,\ k \in \{1,..n\}\}, \leq \rangle$. Mit Hilfe der in 6.2 hergeleiteten Ergebnisse wird in 6.3 ein Algorithmus angegeben, der für jedes $F \in C^n$ solch ein minimales Element liefert. Es erweist sich, daß zur Herleitung dieses Algorithmus lediglich das Verhalten der jeweils vorliegenden Funktion $F \in C^n$ an der Entwicklungsstelle x_o ausschlaggebend ist.
Wie die Beispiele in 6.2 gezeigt haben, verbessert zusätzliche Information über die zu approximierende Funktion $F \in C^n$ i.a. nicht die Einschließungsschärfe der $T^{n,j}F$, d.h. für $k,r \in \{1,..,n\}$ mit $k < r$ gilt i.a. nicht $T^{n,r}F \leq T^{n,k}F$. Insbesondere gibt es keine feste Zahl $k_o \in \{1,..,n\}$, so daß $T^{n,k_o}F$ minimal ist für alle $F \in C^n$; k_o ist i.a. von der Wahl des speziellen $F \in C^n$ abhängig.

Satz 6.3.1
Sei $F \in C^n$, und es existiere ein $k \in \{1,..,n-1\}$ mit $T^kF \leq T^{k+1}F$. Dann ist T^kF minimales Element von $\langle \{T^kF,..,T^nF\}, \leq \rangle$.

Beweis. Aus den Vorraussetzungen und aus Satz 6.2.6 folgt $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$, also gilt $F^{(k)}(M) \ominus F^{(k)}(x_o) = \underset{\bullet}{0}$. Sei $j \in \{k,..,n\}$ und es gelte $T^jF \leq T^kF$. Dann folgt mit Satz 6.2.15

$$h \frac{F^{(k+1)}(x_o)}{k+1} + .. + h^{j-k} \frac{F^{(j)}(M)}{(k+1)..j} \subset F^{(k)}(M) \ominus F^{(k)}(x_o) = \underset{\bullet}{0},$$

wobei zur Abkürzung $h = x - x_o$ für $x \in M$ gesetzt wurde. Also gilt wegen $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ für alle $x \in M$

$$T^jF(x) = F(x_o) + .. + h^k \frac{F^{(k)}(x_o)}{k!} + \underset{\bullet}{0} = T^kF(x).$$

Also folgt aus der Annahme $T^jF \leq T^kF$ immer $T^jF = T^kF$, d.h. T^kF ist minimales Element von $\langle \{T^kF,..,T^nF\}, \leq \rangle$.

Bemerkung 6.3.2
Falls für ein $F \in C^n$ die Vorraussetzungen von Satz 6.3.1 für ein $k < n$ eintreten, so wird man also in der Praxis keine Taylor-Einschließungen der Ordnung $j > k$ berechnen, da man bezüglich der Inklusion keine Verbesserung

der Einschließungsschärfe für F auf ganz M erzielen kann. In diesem Falle können höchstens für $j < k$ Taylor-Approximationen T^jF existieren, welche das Einschließungsergebnis von T^kF für F auf ganz M verbessern.

Beim Beweis von Satz 6.3.1 ging entscheidend ein, daß für $F \in C^n$ $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ ist. Diese Eigenschaft der k-ten Ableitung folgt aber schon, falls für ein $j \in \{k+1,..,n\}$ $T^kF \leq T^jF$ gilt. Damit erhält man

Satz 6.3.3

Sei $F \in C^n$ und $k \in \{1,..,n-1\}$. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig

(1) T^kF ist minimales Element von $\langle \{T^kF,..,T^nF\}, \leq \rangle$.

(2) Entweder existiert ein $j \in \{k+1,..,n\}$ mit $T^kF \leq T^jF$, oder für alle $j \in \{k+1,..,n\}$ gilt $T^kF \parallel T^jF$.

Dual zu den bisherigen Aussagen lassen sich Aussagen über maximale Elemente von Teilmengen von $\{T^1F,..,T^nF\}$, $F \in C^n$, machen. Maximale Elemente sind bezüglich der Inklusion 'schlechteste' Einschließungen von F und interessieren daher in der Praxis weniger.

Satz 6.3.4

Sei $F \in C^n$ und $k \in \{1,..,n-1\}$. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

(1) T^kF ist maximales Element von $\langle \{T^kF,..,T^nF\}, \leq \rangle$.

(2) Entweder existiert ein $j \in \{k+1,..,n\}$ mit $T^jF \leq T^kF$ und $T^jF \neq T^kF$, oder für alle $j \in \{k+1,..,n\}$ gilt

$$T^jF \parallel T^kF \quad \text{oder} \quad T^jF = T^kF.$$

Beweis. Es gelte (2). Sei $j \in \{k+1,..,n\}$ mit $T^jF \leq T^kF$ und $T^jF \neq T^kF$, und sei $l \in \{k+1,..,n\}$ mit $T^kF \leq T^lF$. Dann folgt aus Satz 6.2.6 $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ und damit $F^{(k)}(M) \ominus F^{(k)}(x_o) = 0$. Nun ist $T^jF \leq T^kF$ nach Satz 6.2.15 gleichwertig zu

$$h \frac{F^{(k+1)}(x_o)}{k+1} + .. + h^{j-k} \frac{F^{(j)}(M)}{(k+1)..j} \subset F^{(k)}(M) \ominus F^{(k)}(x_o), \quad h = x - x_o, \; x \in M.$$

Insgesamt erhält man also wegen H.S. 6.2.5

$$T^jF(x) = F(x_o) + .. + h^k \frac{F^{(k)}(x_o)}{k!} + 0 = T^kF(x) \text{ für alle } x \in M.$$

Das ist ein Widerspruch zu $T^jF \neq T^kF$.

Der Rest des Beweises ist klar.

Korollar 6.3.5

Sei $F \in C^n$, und sei $k \in \{1,..,n-1\}$ mit $F^{(k)}(M) \neq F^{(k)}(x_o)$. Dann ist T^kF maximales Element von $\langle \{T^kF,..,T^nF\}, \leq \rangle$.

Beweis. Da $F^{(k)}(M) \neq F^{(k)}(x_o)$ ist, gibt es nach Satz 6.2.9 kein $j \in \{k+1,..,n\}$ mit der Eigenschaft $T^jF \geq T^kF$, also gilt die Behauptung.

Bemerkung 6.3.6

Satz 6.3.4 hat für die Praxis die folgende Konsequenz: Falls für ein $F \in C^n$ und ein $k < n$ die Vorraussetzungen von 6.3.4 bzw. von 6.3.5 erfüllt sind, so kann für $j > k$ T^jF keine schlechteren Einschließungsergebnisse liefern als T^kF. Es ist in diesem Falle immer sinnvoll, für $j > k$ weitere Einschließungen T^jF zu berechnen und unter diesen eine optimale zu suchen für F.

Satz 6.3.7

Sei $F \in C^n$, dann gilt

(1) Falls für alle $k \in \{1,..,n-1\}$ $F^{(k)}(M) \neq F^{(k)}(x_o)$ ist, dann ist T^nF minimales Element von $\langle \{T^1F,..,T^nF\}, \leq \rangle$.

(2) Die Menge der $k \in \{1,..,n-1\}$ mit $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ sei nicht leer, und ihr Minimum werde mit k_o bezeichnet. Dann ist $T^{k_o}F$ minimales Element von $\langle \{T^1F,..,T^nF\}, \leq \rangle$.

Beweis.

(1) Wäre $k < n$ mit $T^kF \leq T^nF$, dann müßte nach Satz 6.2.9 $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ gelten mit Widerspruch zur Vorraussetzung.

(2) Wegen Satz 6.3.3 ist $T^{k_o}F$ minimales Element von $\langle \{T^{k_o}F,..,T^nF\}, \leq \rangle$. Wäre für ein $j \in \{1,..,k_o-1\}$ $T^jF \leq T^{k_o}F$, dann müßte wieder wegen Satz 6.2.9 $F^{(j)}(M) = F^{(j)}(x_o)$ gelten mit Widerspruch zur Konstruktion von k_o.

Nun kann man den Algorithmus (A) zur Auffindung eines minimalen Elementes von $\langle \{T^1F,..,T^nF\}, \leq \rangle$ in Abhängigkeit von den Werten $F^{(k)}(M)$ und $F^{(k)}(x_o)$, $k = 1,..,n-1$, wie folgt beschreiben:

Algorithmus (A)

Vorraussetzungen: Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $M \in \mathbb{I}$, $x_o \in M$ und $F \in C^n(M, \mathbb{I})$

(1) Eingabe der Werte $F^{(k)}(M)$, $F^{(k)}(x_o) \in \mathbb{I}$ für $k = 1,..,n-1$.

(2) Bestimmung der Indexmenge

$$J = \{k \in \{1,..,n-1\} \,/\, F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)\}.$$

(3) Bestimmung der Ordnung k_o des minimalen Elements $T^{k_o}F$ von $\langle \{T^1F,..,T^nF\}, \leq \rangle$ durch

$$k_o = \begin{cases} n, \text{ falls } J = \varnothing \\ \min\{k \,/\, k \in J\} \text{ sonst.} \end{cases}$$

(4) Dann ist das gesuchte minimale Element $T^{k_o}F$.

Falls die Menge $\{T^1F,..,T^nF\}$, $F \in C^n$, ein bezüglich $\leq$ kleinstes Element besitzt, so ist dieses natürlich gleich $T^{k_o}F$, wobei k_o nach dem Algorithmus (A) bestimmt ist. Um allerdings für ein nach dem Algorithmus (A) bestimmtes minimales Element zu untersuchen, ob es auch kleinstes Element ist, ist ein größerer Aufwand nötig, denn es gilt der

Satz 6.3.8

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $F \in C^n$ und sei $T^{k_o}F$ nach dem Algorithmus (A) bestimmt.

(1) Sei $k_o = n$. Dann ist $T^{k_o}F$ genau dann kleinstes Element von $\langle \{T^1F,..,T^nF\}, \leq \rangle$, wenn für alle $k \in \{1,..,n-1\}$ und für alle $x \in M$ gilt

$$(x-x_o)\frac{F^{(k+1)}(x_o)}{k+1} + .. + (x-x_o)^{n-k}\frac{F^{(n)}(M)}{(k+1)..n} \subset F^{(k)}(M) \ominus F^{(k)}(x_o).$$

(2) Sei $k_o < n$. Dann ist $T^{k_o}F$ genau dann kleinstes Element von $\langle \{T^1F,..,T^nF\}, \leq \rangle$, wenn für alle $x \in M$ gilt

(a) Für alle $j \in \{1,..,k_o-1\}$ ist

$$(x-x_o)\frac{F^{(j+1)}(x_o)}{j+1} + .. + (x-x_o)^{k_o-j}\frac{F^{(k_o)}(M)}{(j+1)..k} \subset F^{(j)}(M) \ominus F^{(j)}(x_o),$$

(b) für alle $j \in \{k_o+2,..,n\}$ ist folgender Durchschnitt nicht leer

$$(-F^{(k_o+1)}(x_o)) \cap \left((x-x_o)\frac{F^{(k_o+2)}(x_o)}{k+2} + .. + (x-x_o)^{j-k_o-1}\frac{F^{(j)}(M)}{(k_o+2)..j}\right).$$

Beweis. Aussage (1) ist gleichwertig mit Satz 6.2.15.
Aussage (2) folgt aus Satz 6.2.15 und Satz 6.2.6 bzw. 6.2.9. Die dort benötigte Vorraussetzung $F^{(k_o)}(M) = F^{(k_o)}(x_o)$ steckt hier schon in den Vorraussetzungen (vergl. die Beschreibung des Algorithmus (A)).

Man kann ein einfaches Kriterium dafür angeben, wann für $F \in C^n$ zwei Taylor-Approximationen von F gleich sind:

Satz 6.3.9

Sei $F \in C^n$, und seien $k,j \in \{1,..,n\}$ mit $k < j$. Dann gilt $T^kF = T^jF$ genau dann, wenn $F^{(k+1)}(M) = \underset{\cdot}{0}$ ist, d.h. wenn $F^{(k+1)} = \underset{\cdot}{0}$ gilt.

Beweis. Es sei $T^kF = T^jF$. Aus Satz 6.2.6 folgt daraus $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$. Zusammen mit Satz 6.2.15 erhält man daraus

$$(x-x_o)\frac{F^{(k+1)}(x_o)}{k+1} + ..+ (x-x_o)^{j-k}\frac{F^{(j)}(M)}{(k+1)..j} \subset F^{(k)}(M) \ominus F^{(k)}(x_o),\ x \in M.$$

Division durch $(x-x_o)$ für $x \neq x_o$ und anschließender Grenzübergang für x gegen x_o liefert wegen $F^{(k)}(M) \ominus F^{(k)}(x_o) = \underset{\cdot}{0}$ $F^{(k+1)}(x_o) = \underset{\cdot}{0}$. Durch sukzessives Anwenden dieses letzten Schrittes erhält man schließlich $F^{(j)}(M) = \underset{\cdot}{0}$. Daher folgt aus dem Mittelwertsatz $F^{(j-1)} = \text{const.}$ und wegen $F^{(j-1)}(x_o) = \underset{\cdot}{0}$ weiter $F^{(j-1)}(M) = \underset{\cdot}{0}$. Sukzessives Anwenden dieses Schrittes liefert dann die Behauptung.

Sei umgekehrt $F^{(k+1)}(M) = \underset{\cdot}{0}$. Dann folgt wiederum aus dem Mittelwertsatz $F^{(k)} = \text{const.}$ und daher insbesondere $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$. Also gilt

$$T^jF(x) = F(x_o)+..+(x-x_o)^k\frac{F^{(k)}(x_o)}{k!} + \underset{\cdot}{0} = T^kF(x) \text{ für alle } x \in M.$$

Folgerung 6.3.1o

Sei $F \in C^n$ und $k \in \{1,..,n-1\}$, dann folgt: Entweder gilt für alle Indices $j \in \{k+1,..,n\}$ $T^jF \neq T^kF$, oder für alle diese j ist $T^jF = T^kF$.

Zum Abschluß von 6.3 sollen noch einige Beispiele betrachtet werden.

Beispiel 6.3.11

Sei $M \in \mathbb{I}$, $x_o \in M$ fest und $F:M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto \sum_{k=o}^{n}(x-x_o)^kA_k$, $A_k \in \mathbb{I}$, d.h. F ist ein Intervall-Polynom n-ten Grades mit Entwicklungspunkt x_o.
Es gilt für alle $j \in \{1,..,n-1\}$

$$F^{(j)}(x) = j!A_j + \sum_{k=j+1}^{n}\frac{k!}{(k-j)!}A_k(x-x_o)^{k-j} \quad \text{und} \quad F^{(n)}(x) = n!A_n,\ x \in M.$$

Sei k_o die nach Algorithmus (A) bestimmte Ordnung der minimalen Taylor-Approximation von F. Falls $k_o = n$ ist, so erhält man aus der Gültigkeit von $F^{(k)}(x_o) = k!A_k$ für $k \in \{1,..,n-1\}$ und $F^{(n)}(M) = n!A_n$ sofort $T^nF = F$.

Sei $k_o < n$. Dann erhält man wegen $F^{(k_o)}(M) = F^{(k_o)}(x_o)$ aus der letzten Formel für die k_o-te Ableitung von F $A_k = \underset{\cdot}{0}$ für alle $k = k_o+1,..,n$. Denn wegen $F^{(k_o)}(x_o) = F^{(k_o)}(M)$ ist ja $F^{(k_o)}(x) \subset F^{(k_o)}(x_o)$ für alle $x \in M$, und für Intervalle $A,B \in \mathbb{I}$ folgt aus $A + B \subset A$ stets $B = \underset{\cdot}{0}$.
Also gilt wegen $F^{(k_o)}(M) = F^{(k_o)}(x_o)$

$$F(x) = \sum_{K=0}^{n} (x-x_o)^k \frac{A_k}{k!} = \sum_{K=0}^{k_o} (x-x_o)^k \frac{A_k}{k!} = T^n F(x) = T^{k_o} F(x), \quad x \in M.$$

Also liefert der Algorithmus (A) für jedes I-Polynom n-ten Grades um x_o F gerade $T^n F$ als minimales Element, bzw. es gilt $T^n F = T^{k_o} F$. Dieses Ergebnis war natürlich zu erwarten, denn nach Satz 5.5.3 gilt ja für alle $F \in \mathbb{P}^n_{x_o}$ $T^n F = F$. Für jedes $F \in \mathbb{P}^n_{f_o}$ existiert natürlich auch das kleinste Element von $\langle \{T^1 F,..,T^n F\}, \leq \rangle$ und ist gleich $T^n F$.

Beispiel 6.3.12

Man kann die Einschließungssätze von Paragraph 5 natürlich auch auf reellwertige Abbildungen $f:M \to \mathbb{R}$ anwenden ($M \in \mathbb{II}$).
Die Klasse $C^n(M, \mathbb{R})$ der reellwertigen, n-mal stetig differenzierbaren Abbildungen ist einbettbar in $C^n(M, \mathbb{II})$ durch die Zuordnung

$$f \longmapsto F = [f,f] = \underset{\cdot}{f}, \quad f \in C^n(M, \mathbb{R}).$$

Sei nun $\underset{\cdot}{f} \in C^n(M, \mathbb{II})$ mit $\underset{\cdot}{f}^{(n)} \neq \underset{\cdot}{0}$. Dann ist $\underset{\cdot}{f}^{(k)}(M) \neq \underset{\cdot}{f}^{(k)}(x_o)$ für alle $k \in \{1,..,n-1\}$, und damit ist $T^n \underset{\cdot}{f}$ minimales Element von der geordneten Menge $\langle \{T^1 F,..,T^n F\}, \leq \rangle$.

Beispiel 6.3.13

Sei $M = [-1,0]$, $x_o = 0$, $n = 3$ und $F:M \to \mathbb{II}$ mit $x \mapsto [x^3, e^x]$.
F ist beliebig oft stetig differenzierbar. Es ist $F^{(k)}(M) \neq F^{(k)}(x_o)$ für $k = 1,2$, und daher ist nach Satz 6.3.7 $T^3 F$ minimales Element von $\langle \{T^1 F,..,T^3 F\}, \leq \rangle$. $T^3 F$ ist jedoch nicht kleinstes Element, wie man mit Hilfe von Satz 6.3.8 nachprüft. Mit $k = 1$ und $x_1 = -1/2$ erhält man nämlich aus 6.3.8, Teil (1)

$$(x_1-x_o) \frac{F''(x_o)}{2} + (x_1-x_o)^2 \frac{F'''(M)}{2 \cdot 3} = [-(1/4)+(1/24e), 1/4] \not\subset F'(M) \ominus F'(x_o);$$

denn es ist $F'(M) \ominus F'(x_o) = [0,2]$. Also sind $T^3 F$ und $T^1 F$ nicht vergleichbar, und $T^3 F$ ist kein kleinstes, sondern lediglich ein minimales Element von $\langle \{T^1 F,..,T^3 F\}, \leq \rangle$.

Beispiel 6.3.14

Sei $M = [1/2,2]$, $x_o = 1/2$ und sei $F:M\to\mathbb{I}$ mit $x\to[\ln x, x^2] = [f(x),g(x)]$. F ist beliebig oft stetig differenzierbar in M. Es ist $F'(M) \neq F'(x_o)$ und $F''(M) = F''(x_o)$. Also gilt für jedes $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq 2$: T^2F ist minimales Element von $\langle\{T^1F,..,T^nF\},\leq\rangle$. Es soll untersucht werden, ob T^2F auch kleinstes Element ist. Zunächst gilt für alle $j\in\mathbb{N}$ mit $j\geq 3$ $F^{(j)} = f^{(j)}\vee 0$ und daher $F^{(j)}(M) = F^{(j)}(x_o)$. Nach Satz 6.2.6 gilt also

$$T^2F \leq T^3F \leq \ldots \leq T^nF \text{ für alle } n\in\mathbb{N} \text{ mit } n\geq 3.$$

Nach Satz 6.2.12 erhält man mit $k = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = 3/2$ wegen $F''(M) = [-4,2]$ und $F'(M) \ominus F'(x_o) = [-(1/2),2]$

$$d_2\frac{F''(M)}{2} = [-3,3/2] \not\subseteq F'(M) \ominus F'(x_o) = [-(1/2),2].$$

Also kann auch nicht gelten $T^2F \leq T^1F$. Da T^2F minimales Element ist, so folgt insgesamt $T^2F \parallel T^1F$, und damit besitzt die Menge $\langle\{T^1F,..,T^nF\},\leq\rangle$ kein kleinstes Element.

7 Taylor- Approximationen und Pseudoaddition

7.1 Überblick

Zum Abschluß von § 5 wurde bereits erwähnt, daß sich zur Verbesserung der Einschließungsaussagen für C^n zwei Möglichkeiten anbieten. Eine Möglichkeit (Auffinden eines minimalen Elements von $\langle \{T^{n,1}F,..,T^{n,n}F\}, \leq \rangle$, $F \in C^n$) wurde bereits in § 6 behandelt.

Die andere Möglichkeit besteht nun darin, die zugrunde liegende Klasse C^n in Teilklassen zu zerlegen und für diese nach besseren Einschließungen zu suchen. Hierbei bieten sich verschiedene Wege an, je nachdem, welche Informationen über die zu approximierende Klasse man berücksichtigt. Das führt natürlich auch entsprechend zu verschiedenen zu approximierenden Teilklassen von C^n. In § 7 und § 9 sollen zwei dieser Wege beschrieben werden.

Intervall-Polynome, und damit auch Taylor-Einschließungen, haben die Eigenschaft, mit zunehmender Entfernung vom Entwicklungspunkt breiter zu werden. Man kann diesen Effekt mindern, indem man statt der Intervalladdition möglichst die Pseudoaddition $\dot{+}$ verwendet. In § 7 wird die Teilklasse $\tilde{C}^n$ von C^n (vgl. § 7.2) durch das Ausnutzen des lokalen Verhaltens der Ableitungen $(\lambda F)^{(k)}$, $F \in \tilde{C}^n$, $k = 1,..,n-1$, in Unterklassen $\tilde{D}^n_{K^n}$, $K^n \subset \{1,..,n-1\}$, zerlegt, wobei die Indexmenge K^j angibt, für welche Summanden der gewöhnlichen Taylor- Approximationen man statt der Operation + die Operation $\dot{+}$ verwenden kann. Dies führt zu Einschließungen, welche die Ergebnisse aus § 5 z.T. wesentlich verbessern

In § 7.2 werden jene Teilklassen von C^n konstruiert, für die mittels der Pseudoaddition Verbesserungen der Taylor-Approximationen möglich sind.

In § 7.3 werden für diese Teilklassen Einschließungen konstruiert,und es wird gezeigt, daß diese die Aussagen des § 5 verbessern.

Abschließend werden dann die in § 7.3 konstruierten Approximationen in § 7.4 auf Optimalität untersucht.

7.2 Konstruktion der Klassen $\widetilde{C}^n$ und $\widetilde{D}^n_{K,\Gamma}$

In 7.2 sollen die Teilklassen von C^n konstruiert werden, für die in diesem und zum Teil auch in den nächsten Paragraphen Verbesserungen der Taylor-Approximationen aus § 5 bzw. § 6 hergeleitet werden.

In 7.2 sei stets $M = [a,b] \subset \mathbb{I}$ und $x_o \in M$ fest. Für $F = [f,g]: M \to \mathbb{I}$ gelten die folgenden Abkürzungen für $x_o \in \mathring{M}$: $M_a = [a,x_o]$, $M_b = [x_o,b]$, $f|M_a = f_a$, $f|M_b = f_b$ und analog für g, weiter sei für $c \in \{a,b\}$ $F_c = [f_c,g_c]$.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei dann die Klasse $\widetilde{C}^n(M,\mathbb{I})$ (kurz $\widetilde{C}^n$) wie folgt definiert:

(a) Falls $x_o \in \{a,b\}$ ist, so gehört $F = [f,g] \in C^n$ genau dann zu $\widetilde{C}^n$, wenn die Randfunktionen f,g von F (n-1)-mal stetig differenzierbar sind in M und die n-ten Ableitungen noch in $\mathring{M}$ existieren.

(b) Falls $x_o \in \mathring{M}$ ist, so gehört $F = [f,g] \in C^n$ genau dann zu $\widetilde{C}^n$, wenn die Randfunktionen f_a, g_a von F_a und die Randfunktionen f_b, g_b von F_b (n-1)-mal stetig differenzierbar sind in M_a bzw. in M_b und die n-ten Ableitungen noch in $\mathring{M}_a$ bzw. in $\mathring{M}_b$ existieren.

Nach Konstruktion gilt also $\widetilde{C}^n \subset C^n$. Für n = 1 erhält man die bereits von §4 her bekannte Klasse $\widetilde{C}^1$.

Sei nun $x_o \in \mathring{M}$, und sei $F \in \widetilde{C}^n$. Wegen der n-fachen Differenzierbarkeit von F in x_o erhält man für jedes $k \in \{1,..,n-1\}$

$$F_a^{(k)}(x_o) = F_-^{(k)}(x_o) = F_+^{(k)}(x_o) = F_b^{(k)}(x_o),$$

und daher insbesondere $\vee F^{(k)}(x_o) = \wedge F_a^{(k)}(x_o) = \lambda F_b^{(k)}(x_o)$.

Insbesondere sind die Abbildungen (λF_c), $c \in \{a,b\}$, (n-1)-mal differenzierbar in M_a bzw. in M_b, und die n-ten Ableitungen existieren in $\mathring{M}_a$ bzw. in $\mathring{M}_b$. Es gilt

$$\lambda F^{(k)}(x_o) = \left|(\lambda F_a)^{(k)}(x_o)\right| = \left|(\lambda F_b)^{(k)}(x_o)\right|$$

für jedes $k \in \{1,..,n-1\}$.

Es sollen zwei Teilklassen von C^n vorgestellt werden, die später noch benötigt werden.

Es bezeichne $\mathbb{P}^n_{\gamma_o}(M,\mathbb{I})$ die Menge aller I-Polynome höchstens n-ten Grades $F: M \to \mathbb{I}$ mit Entwicklungspunkt x_o, d.h. die Elemente von $\mathbb{P}^n_{\gamma_o}$ sind von der Form

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k (x-x_o)^k \quad , \quad A_k \in \mathbb{I} \text{ für } k = 1,..,n \text{ und } x \in M.$$

Wir hatten schon in 5.3.3 gezeigt, daß I-Polynome beliebig oft differen-

zierbar sind in $\mathbb{R}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ und $K = \{n_1,..,n_r\} \subset \{1,..,n\}$ sei ${}_{x_o}\mathbb{P}^n_K(M, \mathbb{I})$ jene Menge von I-Funktionen $F: M \to \mathbb{I}$, deren Elemente von der folgenden Form sind:

$$F(x) = (..(\sum_{\substack{k=0 \\ k \notin K}}^{n} A_k (x-x_o)^k) \dot{+} A_{n_1}(x-x_o)^{n_1}) \dot{+} ..) \dot{+} A_{n_r}(x-x_o)^{n_r},$$

dabei ist $A_k \in \mathbb{I}$ für alle $k \in \{0,..,n\}$, $x \in M$, und für alle $x \in M$ gilt

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \notin K}}^{n} |x-x_o|^k \lambda A_k - \sum_{j \in K} |x-x_o|^j \lambda A_j \geq 0.$$

(Die letzte Bedingung sichert erst die Existenz der die Abbildung F definierenden Summe, vgl. die Definition von $\dot{+}$ in § 1.2.)

Man bezeichnet Abbildungen dieser Art als 'verallgemeinerte I-Polynome n-ten Grades um x_o'. Falls $K = \emptyset$ ist, so ist F offensichtlich ein I-Polynom n-ten Grades, und man definiert daher auch ${}_{x_o}\mathbb{P}^n_\emptyset = \mathbb{P}^n_{x_o}$.

Auch für die Klasse ${}_{x_o}\mathbb{P}^n_K$ ist bekannt, daß ihre Elemente beliebig oft differenzierbar sind (vergl. 5.3.6).

Es gilt

Hilfssatz 7.2.1

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt die Inklusion

$$ {}_{x_o}\mathbb{P}^n_K(M, \mathbb{I}) \subset \tilde{C}^n(M, \mathbb{I})$$

für alle Teilmengen K von $\{1,..,n\}$.

Beweis. Sei $F = [f,g] \in {}_{x_o}\mathbb{P}^n_K(M, \mathbb{I})$, und sei z.B. $x_o \in \mathring{M}$. Man erkennt sofort aus der Definition von ${}_{x_o}\mathbb{P}^n_K$, daß dann reelle Polynome p_i, $i = 1,..,4$, existieren mit $p_1, p_2: M_a \to \mathbb{R}$, $p_3, p_4: M_b \to \mathbb{R}$ und

$$f(x) = \begin{cases} p_1(x), & \text{falls } x \in M_a \\ p_3(x), & \text{falls } x \in M_b \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} p_2(x), & \text{falls } x \in M_a \\ p_4(x), & \text{falls } x \in M_b. \end{cases}$$

Also gilt $f_a = p_1$, $f_b = p_3$, $g_a = p_2$, $g_b = p_4$. Die Polynome p_i sind beliebig oft differenzierbar in M_a bzw. in M_b, und daher genügen die Randfunktionen von F der definierenden Eigenschaft der Klasse $\tilde{C}^n$, d.h. es ist $F \in \tilde{C}^n$.

Für I-Funktionen $F \in \tilde{C}^n$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, kann man nun durch Ausnutzen des lokalen Verhaltens der Ableitungsfunktionen $F^{(k)}$ an der Stelle x_o mit Hilfe der Pseudoaddition Verbesserungen der Taylor-Einschließungen aus Paragraph 5 konstruieren. Allerdings gelten diese Einschließungssätze nicht für die jeweils ganze Klasse $\tilde{C}^n$. Man kann lediglich die Klasse $\tilde{C}^n$ disjunkt zerlegen in Teilklassen und für diese Teilklassenn bessere Einschließungsaussagen erhalten. Als nächstes sollen diese Teilklassen konstruiert werden.

Für den Rest von § 7 sei stets $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$.

Für $F \in \widetilde{C}^n(M, \mathbb{I})$ sei dann die Teilmenge K_F^n von $\{1,..,n-1\}$ wie folgt definiert:

$K_F^n = \{n_1,..,n_r \mid n_i \in \{1,..,n-1\}$, und die n_i genügen folgendem Schema (S)$\}$

(S)

1) Falls $x_o = a$ ist, so ist $m \in \{1,..,n-1\}$ genau dann aus K_F^n, falls gilt:
$$(\lambda F)^{(m)}(x_o) \prec 0.$$

2) Falls $x_o = b$ ist, so ist $m \in \{1,..,n-1\}$ genau dann aus K_F^n, falls gilt:
Entweder ist m gerade und $(\lambda F)^{(m)}(x_o) \prec 0$,
oder m ist ungerade und $(\lambda F)^{(m)}(x_o) \succ 0$.

3) Falls $x_o \in \mathring{M}$ ist, so ist $m \in \{1,..,n-1\}$ genau dann aus K_F^n, falls gilt:
Entweder ist m ungerade und $(\lambda F_b)^{(m)}(x_o) \prec o \prec (\lambda F_a)^{(m)}(x_o)$,
oder m ist gerade und es gilt $(\lambda F_a)^{(m)}(x_o), (\lambda F_b)^{(m)}(x_o) \prec o$.

Man entnimmt Schema (S), daß im Falle $x_o \in \mathring{M}$ $K_F^n = K_{F_a}^n \cap K_{F_b}^n$ gilt.

Für $K^n \subset \{1,..,n-1\}$ sei nun $\widetilde{D}_{K^n}^n \subset \widetilde{C}^n$ wie folgt definiert

$$\widetilde{D}_{K^n}^n(M, \mathbb{I}) = \{F \in \widetilde{C}^n / K^n = K_F^n\}.$$

Es sollen einige Eigenschaften der Klassen $\widetilde{D}_{K^n}^n$ hergeleitet werden.

Für $K \subset \{1,..,n\}$ sei $\widetilde{\mathbb{P}}_{x_o K}^n$ jene Teilmenge der $F \in \mathbb{P}_{x_o K}^n$, für deren Koeffizienten A_k mit $k \in K$ und $k < n$ $\lambda A_k > o$ ist.

Hilfssatz 7.2.2

(1) Für alle $K^n \subset \{1,..,n-1\}$ gilt die Inklusion $\widetilde{\mathbb{P}}_{x_o K^n}^n(M, \mathbb{I}) \subset \widetilde{D}_{K^n}^n(M, \mathbb{I})$, insbesondere ist also jedes $\widetilde{D}_{K^n}^n$ nicht leer.

(2) Die Klassen $\widetilde{D}_{K^n}^n(M, \mathbb{I})$ sind paarweise disjunkt, d.h. für K_1^n, K_2^n Teilmenge von $\{1,..,n-1\}$ mit $K_1^n \neq K_2^n$ ist $\widetilde{D}_{K_1^n}^n \cap \widetilde{D}_{K_2^n}^n = \emptyset$.

(3) $\widetilde{C}^n(M, \mathbb{I})$ ist darstellbar als disjunkte Vereinigung der Mengen $\widetilde{D}_{K^n}^n(M, \mathbb{I})$ mit $K^n \subset \{1,..,n-1\}$.

Beweis. (1) Sei zunächst $K^n = \emptyset$ und $F \in \widetilde{\mathbb{P}}_{x_o}^n$.
Falls $x_o = a$ ist, dann gilt für jedes $k = 1,..,n$ $F^{(k)} = [f^{(k)}, g^{(k)}]$,
wobei $F = [f,g]$. Man erhält sofort $K_F^n = \emptyset$.

Falls $x_o = b$ ist, so gilt $F^{(k)} = [g^{(k)}, f^{(k)}]$, falls k ungerade ist, und $F^{(k)} = [f^{(k)}, g^{(k)}]$, falls k gerade ist. Man entnimmt sofort dem Schema (S), daß dann K_F^n leer ist.
Der Fall $x_o \in \mathring{M}$ folgt nun aus den ersten beiden Fällen.

Sei nun $K^n \neq \emptyset$ und $F \in \widetilde{\mathbb{P}}^n_{x_o K^n}$. Dann kann man F in der Form $F = F_1 \dotplus F_2$ schreiben, vgl. 5.3.6, wobei F_1 und F_2 I-Polynome vom Grade $\leq n$ sind. Sei $k \in K^n$ und $x_o = a$. Dann ist $F_1^{(k)}(x_o) = 0$ und $F_2^{(k)}(x_o) = A_k$, wobei A_k der Koeffizient der I-Funktion F bei $(x-x_o)^k$ ist. Also folgt $(\lambda F)^{(k)}(x_o) = \lambda (F_1 \dotplus F_2)^{(k)}(x_o)$ $= - \lambda A_k < o$, da $\lambda A_k > o$ für $k \in K^n$. Die Fälle $x_o = b$ bzw. $x_o \in \mathring{M}$ gehen analog. Genauso zeigt man, daß für $j \in \{1,..,n-1\}$ und $j \notin K^n$ $(\wedge F)^{(j)}(x_o) \geq o$ ist.
Man erhält also insgesamt $K^n = K_F^n$, d.h es ist $F \in \widetilde{D}^n_{K^n}$.
Damit ist (1) bewiesen.

(2) und (3) folgen nun unmittelbar aus der Definition von $\widetilde{D}^n_{K^n}$.

Neben den Klassen $\widetilde{D}^n_{K^n}$ werden später noch die folgenden Klassen betrachtet:
Für $K^n \subset \{1,..,n-1\}$ sei
$\widetilde{C}^n_{K^n}(M, \mathbb{I}) = \{F \in \widetilde{C}^n / K^n \subset K_F^n\}$.

Dann ist $\widetilde{C}^n_{K^n}$ darstellbar als disjunkte Vereinigung der Mengen $\widetilde{D}^n_{J^n}$, wobei $J^n \subset \{1,..,n-1\}$ und $K^n \subset J^n$.
Insbesondere gilt also $\widetilde{C}^n_{\emptyset} = \widetilde{C}^n$ und $\widetilde{C}^n_{\{1,..,n-1\}} = \widetilde{D}^n_{\{1,..,n-1\}}$.
Man ersieht sofort aus der Definition, daß die Mengen $\widetilde{C}^n_{K^n}$ i.a. nicht mehr paarweise disjunkt sind. Es liegt Antitonie im folgenden Sinne vor:
Für $K_1^n, K_2^n \subset \{1,..,n-1\}$ mit $K_1^n \subset K_2^n$ folgt $\widetilde{C}^n_{K_2^n} \subset \widetilde{C}^n_{K_1^n}$.

In 7.3 sollen nun für die Mengen von I-Funktionen $\widetilde{D}^n_{K^n}$ bzw. $\widetilde{C}^n_{K^n}$ einschließende Approximationen konstruiert werden, die die bisherigen Einschließungsergebnisse verbessern.

Bemerkung 7.2.3

Die Klassen $\widetilde{C}^n$ und $\mathbb{P}^n_{x_o}, n \in \mathbb{N}$, sind Teilräume des quasilinearen Raums $\mathbb{I}\mathbb{F}(M, \mathbb{I})$ aller I-Funktionen $F: M \to \mathbb{I}$, versehen mit der punktweise erklärten Addition und skalaren Multiplikation mit reellen Zahlen. Dies trifft nicht mehr zu für die Klassen $\widetilde{\mathbb{P}}^n_{x_o K^n}$, $\widetilde{C}^n_{K^n}$ und $\widetilde{D}^n_{K^n}, K^n \neq \emptyset$, da die Nullfunktion $F = \underset{\circ}{0}$ zu keiner von ihnen gehört.

7.3 Taylor-Approximation und Pseudoaddition

Es sollen nun für die Klassen $\check{D}^n_{K^n}$ Approximationen konstruiert werden, die für $K^n \neq \emptyset$ bessere Einschließungsergebnisse liefern als die Taylor-Approximationen aus § 5.

Wir setzen wieder für ganz 7.3 voraus, daß $M = [a,b] \in \mathbb{I}$ und $x_o \in M$ fest ist.

Es gilt die folgende Einschließungsaussage:

Satz 7.3.1

Sei $K^n = \{n_1,..,n_r\} \subset \{1,..,n-1\}$. Dann existiert für jedes $F \in \check{C}^n_{K^n}$ und für alle $x \in M$ der intervallarithmetische Ausdruck

$$(1)\quad (..(\sum_{\substack{k=0\\ k\notin K^n}}^{n-1} (x-x_o)^k \frac{F^{(k)}(x_o)}{k!}) + (x-x_o)^n \frac{F^{(n)}(M)}{n!}) \dot{+} (x-x_o)^{n_1}\frac{F^{(n_1)}(x_o)}{n_1!}) \dot{+} ..$$

$$..) \dot{+} (x-x_o)^{n_r}\frac{F^{(n_r)}(x_o)}{n_r!},$$

den wir abkürzend mit $T^n_{K^n}F(x)$ bezeichnen wollen, und es gilt für alle $x \in M$

$$(2)\qquad F(x) \subset T^n_{K^n}F(x), \text{ d.h. es gilt } F \in T^n_{K^n}F.$$

Beweis. Sei etwa $x_o \in \mathring{M}$. Für $k \in \{1,..,n-1\}$ und für $c \in \{a,b\}$ gilt $F^{(k)}(x_o) = f_c^{(k)}(x_o) \vee g_c^{(k)}(x_o)$ und $F^{(n)}(x) = f_c^{(n)}(x) \vee g_c^{(n)}(x)$ für $x \in \mathring{M}\setminus\{x_o\}$. Also existieren für jedes $x \in M\setminus\{x_o\}$ nach dem Satz von Taylor für reelle Funktionen $\xi, \eta \in \overset{\circ}{\overline{x \vee x_o}}$, so daß gilt

$F(x) = [f_c(x), g_c(x)] = [f_c(x_o)+..+h^n(f_c^{(n)}(\xi)/n!), g_c(x_o)+..+h^n(g_c^{(n)}(\eta)/n!)]$,

wobei $h = (x-x_o)$ ist.

Wegen $F \in \check{C}^n_{K^n}$ gilt für alle $n_k \in K^n$

$$(3)\quad h^{n_k}(f_c^{(n_k)}(x_o)/n_k!) > h^{n_k}(g_c^{(n_k)}(x_o)/n_k!).$$

Denn sei etwa $x \in M_a$. Nach Voraussetzung ist $n_k \in K^n \subset K^n_F$. Nach Schema Ⓢ folgt dann entweder $(\lambda F_a)^{(n_k)}(x_o) > o$ (falls n_k ungerade ist) oder $(\lambda F_a)^{(n_k)}(x_o) < o$ (falls n_k gerade ist). Wegen $h = (x-x_o) < o$ folgt daraus in beiden Fällen die Behauptung (3).

Falls $x \in M_b$ ist, dann folgt aus Schema Ⓢ stets $(\lambda F_b)^{(n_k)}(x_o) < o$ und daher wegen $h = (x-x_o) > o$ auch (3).

Nun gilt für Intervalle $A = [a_1,a_2]$, $B = [b_1,b_2]$ mit $\lambda B \leq \lambda A$:

Die Gleichung $-B + X = A$ besitzt genau eine Lösung X, und diese ist gegeben durch $X = A \dot{+} B = [a_1+b_2, a_2+b_1]$.

Durch r-faches Anwenden dieser Tatsache erhält man wegen (3) aus der obigen Darstellung von F(x)

$$F(x) = (..([\sum_{\substack{k=0\\k\notin K^n}}^{n-1} h^k \frac{f_c^{(k)}(x_o)}{k!} + h^n \frac{f_c^{(n)}(\xi)}{n!}, \sum_{\substack{k=0\\k\notin K^n}}^{n-1} h^k \frac{g_c^{(k)}(x_o)}{k!} + h^n \frac{g_c^{(n)}(\eta)}{n!}] \dotplus ..$$
$$\dotplus h^{n_1} \frac{F^{(n_1)}(x_o)}{n_1!}) \dotplus ..) \dotplus h^{n_r} \frac{F^{(n_r)}(x_o)}{n_r!}.$$

Da $M\in\mathbb{I}$ und $F^{(n)}$ stetig ist, so ist $F^{(n)}(M)\in\mathbb{I}$. Wegen $A \dotplus B\subset C \dotplus B$ für $A,B,C\in\mathbb{I}$ mit $\lambda A \geq \lambda B$ und $A\subset C$ erhält man daraus die Existenz des intervallarithmetischen Ausdrucks $T^n_{K^n}F(x)$ und die Gültigkeit von $F(x)\subset T^n_{K^n}F(x)$. Da $F\in\tilde{C}^n_{K^n}$ und $x\in M\setminus\{x_o\}$ beliebig gewählt waren, gilt somit die Behauptung.

Bemerkung 7.3.2

(1) Für $F\in\tilde{C}^n_{K^n}$ wird durch (1) aus 7.3.1 das verallgemeinerte I-Polynom um x_o $T^n_{K^n}F: M\to\mathbb{I}$ definiert. Wegen Schema (S) ist $T^n_{K^n}F\in\tilde{P}^n_{x_o K^n}$. Also definiert 7.3.1 einen Approximationsoperator $T^n_{K^n}: \tilde{C}^n_{K^n}\to\tilde{P}^n_{x_o K^n}$ durch die Zuordnung $F\mapsto T^n_{K^n}F$. Das gilt für jede Teilmenge K^n von $\{1,..,n-1\}$. (Der Fall $K^n=\emptyset$ ist nicht ausgeschlossen!)

(2) Für $K^n=\emptyset$ gilt $T^n_{K^n}F = T^nF$ für alle $F\in\tilde{C}^n_\emptyset=\tilde{C}^n$, d.h. man erhält die gewöhnliche Tayloreinschließung n-ter Ordnung. Für die gesamte Klasse $\tilde{C}^n$ ist also mit den Methoden von 7.3.1 keine Verbesserung der gewöhnlichen Tayloreinschließung möglich, sondern lediglich für die Klasse $\tilde{C}^n\setminus\tilde{D}^n_\emptyset$.

(3) Das folgende Beispiel zeigt, daß man in 7.3.1 nicht auf die Forderung nach der Differenzierbarkeit der Randfunktionen verzichten kann, d.h. daß bei der Definition von $\tilde{C}^n_{K^n}$ bzw. von $\tilde{D}^n_{K^n}$ die Forderung nach der Differenzierbarkeit der Randfunktionen für unsere Zwecke zwingend ist.

Sei $M=[0,3]$, $x_o=0$ und $F: M\to\mathbb{I}$ mit $F(x)=[-1,1](2+|x-1|)$. Weiter sei $n=2$. Dann ist $F'(x)=[-1,1]$, $F''(x)=0$ für $x\in M$. Der intervallarithmetische Ausdruck $T^2_{K^2_F}F$ mit $K^2_F=\{1\}$ ist für alle $x\in M$ definiert, und es gilt $T^2_{K^2}F=[-3+x,3-x]$. $T^2_{K^2}F$ ist aber keine einschließende Approximation von F für $x\in(1,3]$.

Korollar 7.3.3

Sei $K^n\subset\{1,..,n-1\}$. Dann gilt für jede Teilmenge $J^n\subset\{1,..,n-1\}$ mit $K^n\subset J^n$: $T^n_{K^n}|\tilde{D}^n_{J^n}$ ist eine Approximation für die Klasse $\tilde{D}^n_{J^n}$. Dies gilt insbesondere für $T^n_{K^n}|\tilde{D}^n_{K^n}=\tilde{T}^n_{K^n}$ und für die Klasse $\tilde{D}^n_{K^n}$.

Beweis. Nach Definition von $\tilde{C}^n_{K^n}$ gilt für $K^n\subset J^n$ stets $\tilde{D}^n_{J^n}\subset\tilde{C}^n_{K^n}$. Also folgt die Behauptung aus 7.3.1.

Wir hatten bereits gezeigt, daß $\tilde{\mathbb{P}}^n_{x_o K^n}$ Teilmenge von $\tilde{D}^n_{K^n}$ und damit auch von $\tilde{C}^n_{K^n}$ ist. Weiter gilt

Bemerkung 7.3.4

Sei $K^n \subset \{1,..,n-1\}$, dann ist für alle $F \in \tilde{\mathbb{P}}^n_{x_o K^n}$ $F = T^n_{K^n} F$.

Beweis. Sei $K^n = \{n_1,..,n_r\}$ und $F \in \tilde{\mathbb{P}}^n_{x_o K^n}$. Dann ist also für alle $x \in M$

$F(x) = (..(\sum_{\substack{k=0 \\ k \notin K^n}}^{n} (x-x_o)^k A_k) + (x-x_o)^{n_1} A_{n_1}) +..) + (x-x_o)^{n_r} A_{n_r}$ für $x \in M$ und $A_k \in \mathbb{I}$ für $k = 0,..,n$.

In 5.3.6 wurde bereits gezeigt, daß F beliebig oft differenzierbar ist in M, und daß gilt $F^{(k)}(x_o) = k! A_k$ für $k = 1,..,n-1$ und $F^{(n)}(x) = n! A_n$ für alle $x \in M$. Insbesondere ist daher $A_n = F^{(n)}(M)/n!$, und man kann F auch wie folgt schreiben

$$F(x) = (..(\sum_{\substack{k=0 \\ k \notin K^n}}^{n-1} (x-x_o)^k \frac{F^{(k)}(x_o)}{k!} + (x-x_o)^n \frac{F^{(n)}(M)}{n!}) + (x-x_o)^{n_1} \frac{F^{(n_1)}(x_o)}{n_1!}) +..) + (x-x_o)^{n_r} \frac{F^{(n_r)}(x_o)}{n_r!} .$$

Das gilt für alle $x \in M$, und daher gilt die Behauptung.

Beispiel 7.3.5

Sei $M = [1,2]$, $x_o = 2$ und $F: M \to \mathbb{I}$ mit $F(x) = [\ln x, e^x]$. Weiter sei $n = 4$. Dann ist $F \in \tilde{C}^4$. Man erhält weiter $K^4_F = \{1,3\}$. Also ist F Element von $\tilde{D}^4_{\{1,3\}}$.

Wegen 7.3.1 erhält man daher folgende Einschließung für F: Es gilt $F(x) \subset T^4_{K^4} F(x)$ für alle $x \in M$, wobei $T^4_{K^4} F = [f_1, g_1]$ gegeben ist durch

$f_1(x) = \ln 2 + (x-2)/2 - (x-2)^2/8 + (x-2)^3/4 - (x-2)^4/4$ und

$g_1(x) = e^2 + e^2(x-2) + e^2(x-2)^2/2 + e^2(x-2)^3/6 + e^2(x-2)^4/24$, $x \in M$.

Wir wollen noch $T^4_{K^4} F$ mit den gewöhnlichen Taylor-Approximationen für F vergleichen.

Es ist $F'(M) = F'(x_o)$ und daher wegen 6.3.7 $T^1 F$ minimales Element der geordneten Menge $\langle \{T^1 F,..,T^n F\}, \leq \rangle$. Man erhält für alle $x \in M$

$T^1 F(x) = [\ln 2 - 2e^2 + e^2 x, e^2 - 1 + x/2]$.

Man rechnet leicht nach, daß für alle $x \in M$ dann $T^4_{K^4} F(x) \subset T^1 F(x)$ gilt, d.h. es ist $T^4_{K^4} F \leq T^1 F$.

Sei nun $F \in \tilde{C}^n$. Dann ist $F \in \tilde{C}^n_{J^n}$ für alle $J^n \subset \{1,..,n-1\}$ mit $J^n \subset K^n_F$. Damit stehen für F als einschließende Approximationen alle $T^n_{J^n} F$ mit $J^n \subset K^n_F$ zur Verfügung. Es stellt sich also die Frage, ob man die $T^n_{J^n} F$ miteinander ver-

gleichen kann, und ob es eine (bzgl. der Inklusion) beste Einschließung für F unter diesen Approximationen gibt.

Weiterhin ist es natürlich wichtig zu wissen, welche Ordnungsbeziehungen zwischen der Taylor-Approximation $T^n F$ für F und diesen $T^n_{J^n} F$ bestehen.

Es gilt

Satz 7.3.6

Seien $K_i^n \subset \{1,..,n-1\}$ für i=1,2 mit $K_1^n \subset K_2^n$. Dann ist $\tilde{C}^n_{K_2^n} \subset \tilde{C}^n_{K_1^n}$, und für alle $F \in \tilde{C}^n_{K_2^n}$ gilt

$$T^n_{K_2^n} F \leq T^n_{K_1^n} F,$$

und für $K_1^n \neq K_2^n$ tritt keine Gleichheit ein.

Beweis. Sei $K_2^n = \{n_1,..,n_r\}$ und $K_1^n = \{n_1,..,n_s\}$ für $s \leq r$. Es ist

$$T^n_{K_2^n} F(x) = (..(F(x_o) + .. + h^n \frac{F^{(n)}(M)}{n!}) \dot{+} h^{n_1} \frac{F^{(n_1)}(x_o)}{n_1!}) \dot{+} ..) \dot{+} h^{n_r} \frac{F^{(n_r)}(x_o)}{n_r!}.$$

Falls $C = (..(A_1 \dot{+} A_2) \dot{+} A_3) \dot{+} ..) \dot{+} A_n \in \mathbb{II}$ ist, $A_i \in \mathbb{II}$ für i=1,..,n, dann gilt für jede Permutation $(i_2,..,i_n)$ von (2,3,..,n)

$$C = (..(A_1 \dot{+} A_{i_2}) \dot{+} A_{i_3}) \dot{+} ..) \dot{+} A_{i_n}.$$

Also kann man die Summanden von $T^n_{K_2^n} F$, die bei $\dot{+}$ stehen, so umordnen, daß die Summanden $h^i F^{(i)}(x_o)/i!$ mit $i \in K_2^n \setminus K_1^n$ ans Ende zu stehen kommen.

Nun gilt für $A,B \in \mathbb{II}$ mit $\lambda A \geq \lambda B$ die Inklusion $A \dot{+} B \subset A+B$.

Wendet man diese Beziehung sukzessive auf die umgeordnete Darstellung von $T^n_{K_2^n} F(x)$ an, so erhält man nach endlich vielen Schritten unter Beachtung der Identität $(A \dot{+} B)+C = (A+C) \dot{+} B$, $A,B,C \in \mathbb{II}$, $\lambda A \geq \lambda B$, die Behauptung.

Daß für $K_1^n \neq K_2^n$ immer $T^n_{K_1^n} F \neq T^n_{K_2^n} F$ ist, folgt sofort aus Schema (S) und aus der Beziehung $\lambda(A \dot{+} B) < \lambda(A \dot{+} C)$ für $A,B,C \in \mathbb{II}$ mit $\lambda A \geq \lambda B > \lambda C$.

Aus 7.3.6 folgt nun sofort

Satz 7.3.7

(1) Sei $F \in \tilde{C}^n$. Dann gilt für alle $J^n \subset \{1,..,n-1\}$ mit $J^n \subset K_F^n$

$$T^n_{K_F^n} F \leq T^n_{J^n} F.$$

(2) Für jedes $K^n \subset \{1,..,n-1\}$ und für alle $F \in C^n_{K^n}$ gilt $T^n_{K^n} F \leq T^n F$.

Bemerkung 7.3.7

Man kann Teil (1) von 7.3.7 auch wie folgt formulieren:

Sei $K^n \subset \{1,..,n-1\}$. Dann gilt für alle $F \in \tilde{D}^n_{K^n}$ und für alle $J^n \subset K^n$ $T^n_{K^n} F \leq T^n_{J^n} F$. Für $F \in \tilde{C}^n$ ist also nach 7.3.7 die Einschließung $T^n_{K_F^n} F$ die bestmögliche unter allen Einschließungen der Form $T^n_{J^n} F$.

Falls es in der Praxis nicht möglich ist, für gegebenes $F \in \tilde{C}^n$ K_F^n zu bestimmen, so bestimme man eine möglichst große Teilmenge $K^n \subset K_F^n$. Dann liefert $T_{K^n}^n F$ eine einschließende Approximation von F, die zwar schlechter als $T_{K_F^n}^n F$, jedoch immer noch besser als die gewöhnliche Taylor-Approximation $T^n F$ ist.

Bemerkung 7.3.8

Falls für ein $F \in \tilde{C}^n$ die Einschließung $T_{K_F^n}^n F$ konstruiert werden soll und $x_o \in \mathring{M}$ ist, so bekommt man i.a. eine schärfere Einschließung für F, wenn man 7.3.1 auf die I-Funktionen $F_a: M_a \to \mathbb{I}$ und $F_b: M_b \to \mathbb{I}$ getrennt anwendet. Das liegt daran, daß in diesem Fall die Mengen $K_{F_a}^n$ und $K_{F_b}^n$ größer sind als die Menge K_F^n, vergl. auch Schema Ⓢ.

Betrachte das folgende Beispiel:

Sei $M = [1/2, 2]$, $x_o = 1$ und $F: M \to \mathbb{I}$ mit $F(x) = [-1,1]\,1/x$. Weiter sei $n=4$. Es ist also $x_o \in \mathring{M}$, und mit Hilfe von Schema Ⓢ prüft man leicht nach, daß $K_F^n = \emptyset$ ist.

Seien nun $F_a: M_a = [1/2,1] \to \mathbb{I}$ und $F_b: M_b = [1,2] \to \mathbb{I}$ mit $F_a = F \mid M_a$ und $F_b = F \mid M_b$.

Dann ist $K_{F_a}^n = \emptyset$ und $K_{F_b}^n = \{1,3\}$, d.h. für F_a erhält man lediglich wieder die gewöhnliche Taylor-Approximation $T^n F$. Für F_b hingegen erhält man eine echte Verbesserung im Vergleich zur gewöhnlichen Taylor-Einschließung $T^n F$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$. Dann gelten die bisher in §7 hergeleiteten Aussagen für jedes feste $j \in \{2,..,n\}$. Wegen $\tilde{C}^n \subset \tilde{C}^j$ für alle $j \in \{1,..,n\}$ erhält man daher für jedes $j \in \{2,..,n-1\}$ neben den Approximationen der Form $T_{K^n}^n$, $K^n \subset \{1,..,n-1\}$, weitere Einschließungsoperatoren für geeignete Teilklassen von $\tilde{C}^n$.

Sei $j \in \{2,..,n\}$ beliebig, fest. Dann gilt für jedes $F \in \tilde{C}^n$ $K_F^j = K_F^n \cap \{1,..,j-1\}$. Für $K^j \subset \{1,..,j-1\}$ sei $\tilde{C}_{K^j}^n = \tilde{C}_{K^j}^j \cap \tilde{C}^n$ und $\tilde{D}_{K^j}^n = \tilde{D}_{K^j}^j \cap \tilde{C}^n$.

Dann gilt also $\tilde{D}_{K^j}^n \subset \tilde{C}_{K^j}^n$ und $\tilde{C}_{K_2^j}^n \subset \tilde{C}_{K_1^j}^n$ für K_1^j, $K_2^j \subset \{1,..,j-1\}$ mit $K_1^j \subset K_2^j$.

Weiterhin ist $\tilde{C}^n$ darstellbar als disjunkte Vereinigung der $\tilde{D}_{K^j}^n$, $K^j \subset \{1,..,j-1\}$.

Die Klasse $\tilde{P}_{x_o K^j}^j$ der verallgemeinerten I-Polynome j-ten Grades um x_o (vgl. § 7.2), für deren Koeffizienten A_k mit $k \in K^j$ $\lambda A_k \geq o$ ist, gehört zu $\tilde{C}_{K^j}^n$.

Sei nun $K^j \subset \{1,..,j-1\}$. Dann wird durch $T_{K^j}^{n;j} = T_{K^j}^j \mid \tilde{C}_{K^j}^n$ eine einschließende Approximation $T_{K^j}^{n;j}$ für $\tilde{C}_{K^j}^n$ definiert. Es ist $T_{K^j}^{n;j}: \tilde{C}_{K^j}^n \to \mathbb{I}_{x_o} \tilde{P}_{x_o K^j}^j \subset \tilde{C}_{K^j}^n$.

Seien $K_1^j, K_2^j \subset \{1,..,j-1\}$ mit $K_1^j \subset K_2^j$, dann folgt $T_{K_2^j}^{n;j} F \in T_{K_1^j}^{n;j} F$ für alle $F \in \tilde{C}_{K_2^j}^n \subset \tilde{C}_{K_1^j}^n$. Insbesondere ist also $T_{K_F^j}^{n;j} F \in T_{K^j}^{n;j} F$ für alle $F \in \tilde{C}^n$ und für alle $K^j \subset \{1,..,j-1\}$ mit $K^j \subset K_F^j$, d.h. $T_{K_F^j}^{n;j}$ ist beste Approximation für $\tilde{D}_{K^j}^n$ unter allen Approximationen der Form $T_K^{n;j}$ mit $K \subset \{1,..,j-1\}$ und $K \subset K^j$.

Insbesondere gilt für jedes $F \in \tilde{C}^n$ $T^{n,j}_{K_F^j} F \leq T^{n,j} F = T^j F$ für alle Teilmengen K^j von $\{1,..,j-1\}$ mit $K^j \subset K_F^j$, d.h. die Approximationen der Form $T^{n,j}_{K^j}$ sind (im Falle $K^j \neq \emptyset$ echte) Verbesserungen der gewöhnlichen Taylor-Einschließungen $T^{n,j} = T^j$.

Diese Aussagen gelten für jedes feste $j \in \{2,..,n\}$. (Für $j = n$ ist $T^{n,n}_{K^n} = T^n_{K^n}$.) Genauso wie in § 6 stellt sich daher die Frage, wie sich die Einschließungsgüte von $T^{n,j}_{K_F^j} F$, $F \in \tilde{C}^n$ vorgegeben, ändert, wenn der Index j die Menge $\{2,..,n\}$ durchläuft. Weiterhin stellt sich wieder die Frage, welche von diesen Approximationen eine bzgl. der Inklusion bestmögliche Einschließung für gegebenes $F \in \tilde{C}^n$ liefern, d.h. es ist eine Entscheidungsvorschrift gesucht, die für jedes $F \in \tilde{C}^n$ ein minimales Element der geordneten Menge $\langle \{T^{n,2}_{K_F^2} F,..,T^{n,n}_{K^n} F\}, \leq \rangle$ angibt. Man kann diese Fragestellung verallgemeinern, indem man nach einer Entscheidungsvorschrift fragt, die für gegebenes $F \in \tilde{C}^n$ ein minimales Element der geordneten Menge $\langle \{T^{n,1} F,..,T^{n,n} F\} \cup \{T^{n,2}_{K^2} F,..,T^{n,n}_{K^n} F\}, \leq \rangle$ liefert. (Hierbei ist natürlich stets $K_F^n \neq \emptyset$ vorausgesetzt; für $K_F^n = \emptyset$ ergibt sich nichts Neues.)
Dies ist Thema von § 8.

Beispiel 7.3.9

Sei $M = [1,2]$, $x_o = 1$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $F(x) = [\ln x, 1+(1/x)]$ und $n = 2$.
Dann ist $F \in \tilde{C}^2$, und wegen $(\lambda F)'(x_o) < 0$ folgt weiter $K_F^2 = \{1\}$.
Mit Methoden, die in §8 entwickelt werden, oder durch Nachrechnen, zeigt man, daß dann $T^{2,2}_{K_F^2} F \leq T^{2,1} F = T^1 F$ ist.
Es gilt $F'(M) = F'(x_o)$. Wegen 6.2.6 folgt daher $T^1 F \leq T^2 F$.
Also ist $T^{2,2}_{K_F^2} F$ kleinstes Element von $\langle \{T^{2,1} F, T^{2,2}_{K_F^2} F\} \cup \{T^{2,2}_{K_F^2} F\}, \leq \rangle$.

Die Aussagen von § 7 gelten trivialerweise auch für $j = 1$. In diesem Fall ist nach Schema (S) $K_F^1 = \emptyset$ und $T^{n,1}_{K_F^1} F = T^{n,1} F$ für jedes $F \in \tilde{C}^n$.

7.4 Optimalität der Approximationsoperatoren $T^{n,j}_{K^j}$

In 7.4 sollen die in § 7.3 konstruierten Approximationen auf Optimalität untersucht werden.

Sei $n\in\mathbb{N}$ und $n\geq 2$. In § 7.3 wurde gezeigt, daß für jedes $j\in\{1,..,n\}$ und für jede Teilmenge K^j von $\{1,..,j-1\}$ $T^{n,j}_{K^j} = T^j_{K^j} \mid \tilde{C}^n_{K^j}$ eine Einschließung für $\tilde{C}^n_{K^j}$ ist. Für $j = n$ erhält man insbesondere $T^{n,n}_{K^n} = T^n_{K^n}$ und die Klasse $\tilde{C}^n_{K^n}$. Falls $K^j = \emptyset$ ist, so erhält man $T^{n,j}_{K^j} = T^{n,j} = T^j$ und $\tilde{C}^n_{K^j} = \tilde{C}^n$.

Seien nun $j\in\{1,..,n\}$ und $K^j = \{n_1,..,n_r\} \subset \{1,..,j-1\}$ beliebig, fest. Die Wertzuweisungen $W^j_i : \tilde{C}^n_{K^j} \to \mathbb{I}$ seien definiert durch $W^j_i(F) = F^{(i)}(x_o)$ für $0\leq i\leq j-1$ und $W^j_j(F) = F^{(j)}(M)$.

Sei $\mathcal{H}$ jene Teilmenge von $\mathbb{I}^{j+1}$, für deren Elemente $(V_0,..,V_j)$ gilt

$$\lambda\Big(\sum_{\substack{k=0\\ k\notin K^j}}^{j} (x-x_o)^k V_k\Big) \geq \lambda\Big(\sum_{k\in K} (x-x_o)^i V_i\Big) \quad \text{für alle } x\in M.$$

Weiter sei $\alpha^{n,j} : \mathcal{H}\times M \to \mathbb{I}$ mit

$$(V_0,..,V_n,x) \mapsto \Big(\sum_{\substack{k=0\\ k\notin K^j}}^{j} (x-x_o)^k V_k/k!\Big) + (x-x_o)^{n_1} V_{n_1}/n_1! + ..+ (x-x_o)^{n_r} V_{n_r}/n_r!.$$

Dann ist die Approximation $T^{n,j}_{K^j}$ berechenbar bzgl. der Werte W^j_i, $i = 0,..,j$, und der (rationalen) I-Funktion $\alpha^{n,j}$. Weiter gilt

Satz 7.4.1

$T^{n,j}_{K^j}$ ist beste Approximation für $\tilde{C}^n_{K^j}(M,\mathbb{I})$ bzgl. $\mathcal{U}(\tilde{C}^n_{K^j}, W^j_0,..,W^j_j)$.

Beweis. Es ist $T^{n,j}_{K^j}(\tilde{C}^n_{K^j}) \subset \tilde{C}^n_{K^j}$, denn $T^{n,j}_{K^j} : \tilde{C}^n_{K^j} \to \tilde{P}^j_{x_o K^j}$, und $\tilde{P}^j_{x_o K^j}$ ist Teilmenge von $\tilde{C}^n_{K^j}$ (vgl. 7.2.2). Aus den Differenzierbarkeitsregeln für verallgemeinerte I-Polynome (vgl. 5.3.6) erhält man weiter die Gültigkeit von $W^j_i(F) = W^j_i(T^{n,j}_{K^j}F)$ für alle $F\in\tilde{C}^n_{K^j}$ und für $i = 0,..,j$. Die Behauptung folgt daher wegen 2.4.5.

Korollar 7.4.2

$\tilde{T}^{n,j}_{K^j} = T^{n,j}_{K^j} \mid \tilde{D}^n_{K^j}$ ist beste Approximation für $\tilde{D}^n_{K^j}$ bzgl. $\mathcal{U}(\tilde{D}^n_{K^j}, W^j_0,..,W^j_j)$.

Beweis. Wegen $\tilde{P}^j_{x_o K^j} \subset \tilde{D}^n_{K^j}$ folgt die Behauptung ebenso wie für 7.4.1.

Man zeigt leicht anhand eines Beispiels, daß $T^{n,j}_{K^j}$ nicht quasi-isoton ist und daher auch nicht optimal für $\tilde{C}^n_{K^j}$ sein kann bzgl. $\mathcal{U}(\tilde{C}^n_{K^j}, T^{n,j}_{K^j}(\tilde{C}^n_{K^j}))$.

Klar ist die folgende Aussage

Hilfssatz 7.4.3

Es ist $T^{n,j}_{K^j}(\tilde{C}^n_{K^j}) = \tilde{P}^j_{x_o K^j}$, und daher gilt für $F\in\tilde{C}^n_{K^j}$ $T^{n,j}_{K^j}F = F$ genau dann, wenn $F\in\tilde{P}^j_{x_o K^j}$ ist.

Bemerkung 7.4.4

Seien $K_i^j \subset \{1,..,j-1\}$ für i=1,..,m,und sei $K^j = \bigcap_i K_i^j$. Nach 7.3.1 ist dann $T^{n,j}_{K^j}$ für die Klasse $\bigcup_i \tilde{C}^n_{K_i^j} \subset \tilde{C}^n_{K^j}$ eine einschließende Approximation. $T^{n,j}_{K^j}$ ist auch berechenbar. Man kann jedoch in diesem Falle keine Optimalitätsaussage machen, da i.a. die Menge der verallgemeinerten I-Polynome $\tilde{\mathbb{P}}^j_{x_o K^j}$ nicht zu $\bigcup_i \tilde{C}^n_{K_i^j}$ gehört.

Bemerkung 7.4.5

Ein verallgemeinertes I-Polynom $F \in \tilde{\mathbb{P}}^j_{x_o K^j}$ um x_o läßt sich i.a. nicht umentwickeln in ein I-Polynom um $z_o \neq x_o$. Denn jedes $F \in \tilde{\mathbb{P}}^j_{x_o K^j}$ läßt sich in der Form $F = F_1 \dot{+} F_2$ schreiben, wobei die F_i gewöhnliche I-Polynome um x_o sind; und damit folgt $\lambda F = \lambda F_1 - \lambda F_2$, d.h. λF wird mit zunehmender Entfernung von x_o relativ zu λF_1 schmaler.

$F \in \tilde{\mathbb{P}}^j_{x_o K^j}$ läßt sich genau dann umentwickeln um $z_o \neq x_o$, wenn λF = const. ist, d.h. wenn F von der Form ist

$$F(x) = \Big(\sum_{\substack{k=0 \\ k \notin K^j}}^{j} A_k (x-x_o)^k \Big) \dot{+} (x-x_o)^{n_1} A_{n_1} \dot{+} .. \dot{+} (x-x_o)^{n_r} A_{n_r}$$

mit $A_o \in \mathbb{I}$ und $A_i = a_i$, $a_i \in \mathbb{R}$, für i = 1,..,j.

Sei $F \in \tilde{\mathbb{P}}^j_{x_o K}$, dann folgt stets $F^{(j+1)} = \dot{0}$. Falls umgekehrt $F \in \tilde{C}^n$ ist mit $F^{(n)} = \dot{0}$, so folgt i.a. nicht $F \in \tilde{\mathbb{P}}^j_{x_o K}$ für ein $j \leq n$ und $K \subset \{1,..,j\}$. Denn sei z.B. $M = [-1,1]$, $x_o = 0$ und $F \in \tilde{C}^4(M,\mathbb{I})$ mit

$$F(x) = \begin{cases} [0,1] + [0,1]\, x^2 + [0,1]\, x^3, & \text{falls } x \in [-1,0], \\ [0,1] \dot{+} [0,1]\, x^2 \dot{+} [0,1]\, x^3, & \text{falls } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Es ist $F^{(4)} = \dot{0}$, aber es gibt kein $j < 4$ und kein $K \subset \{1,..,j\}$ mit $F \in \tilde{\mathbb{P}}^j_{x_o K}$.

Hilfssatz 7.4.6

Sei $F \in \tilde{C}^n$,und es gelte $F^{(n)} = \dot{0}$. Dann folgt:

(1) Falls $x_o \in \{a,b\}$ ist, dann existiert ein $j \in \{1,..,n-1\}$ und ein $K \subset \{1,..,j\}$, so daß $F \in \tilde{\mathbb{P}}^j_{x_o K}$ ist.

(2) Falls $x_o \in \mathring{M}$ ist, dann gilt (1) für die Einschränkungen F_a, F_b von F auf M_a bzw. M_b. Die Aussage (1) gilt genau dann für F, wenn $K^n_{F_a} = K^n_{F_b}$ ist.

Beweis. (1) Sei F = [f,g] und sei etwa $x_o = a$. Aus $F^{(n)} = \dot{0}$ folgt zunächst $f^{(n)} = g^{(n)} = 0$. Also sind f,g Polynome vom Grade $< n$. Sei $j'-1 = \max\{\text{grad } f, \text{grad } g\}$. Dann gibt es $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_{j'} = b_{j'} = 0$, so daß $f(x) = \sum_{i=0}^{j'} (x-x_o)^i a_i$ ist und $g(x) = \sum_{i=0}^{j'} (x-x_o)^i b_i$. Sei nun $m \in K^n_F = K^{j'}_F$, dann ist wegen $x_o = a$ $(\lambda F)^{(m)}(x_o) = (b_m - a_m)\, m! < 0$, d.h. es ist $b_m < a_m$.

Für $m \in \{1,..,j\} \setminus K_F^{j'}$ ist stets $a_m \leq b_m$. Daher folgt aus der Definition von $\dot{+}$ (vgl. § 1.2) mit $K_F^j = \{n_1,..,n_s\}$, $j = j'-1$, wegen $a_{j'} = b_{j'} = o$

$$F(x) = [f(x),g(x)] = \Big(\sum_{i \notin K_F^j}^{\dot{+}} (x-x_o)^i [a_i,b_i]\Big) \dot{+} (x-x_o)^{n_1}[b_{n_1},a_{n_1}] \dot{+} \dot{+} (x-x_o)^{n_s}[b_{n_s},a_{n_s}],$$

d.h. es gilt die Behauptung.
Der Beweis von (2) folgt nun sofort aus (1).

Wir stellen abschließend fest:Die Einschließungsaussagen von § 5 sind verbesserbar für die Teilklasse $\tilde{C}^n \setminus \tilde{D}_\emptyset^n$ von C^n. Für gegebenes $F \in \tilde{C}^n \setminus \tilde{D}_\emptyset^n$ stehen für jedes feste $j \in \{1,..,n\}$ die Approximationen $T_{K_F^j}^{n,j}F$ zur Verfügung, wobei $K^j \subset K_F^j$ ist, und es ist $T_{K_F^j}^{n,j}F \leq T_{K^j}^{n,j}F$ für alle $K^j \subset K_F^j$. Weiterhin ist die Approximation $T_{K^j}^{n,j}$ beste berechenbare Approximation für $\tilde{D}_{K^j}^n$.
Diese Optimalitätsaussage berücksichtigt nicht die übrigen Approximationen $T_{K^k}^{n,k}$, $k \in \{1,..,n\}$ und $k \neq j$.Es soll daher als nächstes untersucht werden, für welche Indices $j \in \{1,..,n\}$ die Approximationen $T_{K^j}^{n,j}F$ möglichst gute Einschließungen für F ergeben. Dies ist Thema von § 8.

Für $j \in \{1,..,n\}$ sei $\tilde{D}_\emptyset^{n,j} = \{F \in \tilde{C}^n \;/\; K_F^j = \emptyset\}$. Dann ist $\tilde{D}_\emptyset^{n,n} = \tilde{D}_\emptyset^n$, $\tilde{D}_\emptyset^{n,1} = \tilde{C}^n$, und für $k < j$ aus $\{1,..,n\}$ gilt $\tilde{D}_\emptyset^{n,k} \supset \tilde{D}_\emptyset^{n,j}$.
Die gewöhnlichen Taylor-Approximationen $T^{n,k}$, $k \in \{1,..,n\}$, sind berechenbar bzgl. $W_o^k,..,W_k^k$, und es gilt

Satz 7.4.7
Für alle $k,j \in \{1,..,n\}$ ist die Einschränkung von $T^{n,k}$ auf $\tilde{D}_\emptyset^{n,j}$ beste Approximation für $\tilde{D}_\emptyset^{n,j}$ bzgl. $\mathcal{O}(\tilde{D}_\emptyset^{n,j}, W_o^k,..,W_k^k)$.

Beweis. Für $F \in \tilde{C}^n$ ist $K_{T^{n,k}F}^n = \emptyset$, und daher bildet $T^{n,k}$ die Menge $\tilde{D}_\emptyset^{n,j}$ in sich ab. Wegen $W_i^k(F) = W_i^k(T^{n,k}F)$ für $F \in \tilde{D}_\emptyset^{n,j}$ und für alle $i = o,..,k$ folgt dann die Behauptung wegen 2.4.5.

Für $F \in \tilde{D}_\emptyset^n$ sind die Aussagen aus § 7 nicht anwendbar. Es gibt noch andere Möglichkeiten, für eine gewisse Teilmenge von $\tilde{D}_\emptyset^n$ die durch die $T^{n,k}F$ vermittelten Einschließungen zu verbessern. Darauf wird in § 9 eingegangen.

8 Ein Algorithmus zur Angabe eines minimalen Elementes der geordneten Menge $\langle \{T^{n,1}_{K^1_F},..,T^{n,n_F}_{K^{n_F}_F}\}, \leq \rangle$ für $F \in \tilde{C}^n$.

8.1 Überblick

Die Approximationsaussagen des § 7 für die Klasse $\tilde{C}^n(M, \mathbb{I})$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $M = [a,b] \in \mathbb{I}$ und $x_0 \in \mathbb{I}$ fest ist, lassen sich weiter verbessern. Will man ein weiteres Verkleinern der zu approximierenden Klasse vermeiden, so bietet sich die Methode an, die wir schon in § 6 zur Verschärfung der Einschließungsaussagen für n-mal stetig differenzierbare I-Funktionen verwendet haben.

In § 7 wurde u.a. gezeigt, daß für jedes $j \in \{1,..,n\}$ die Einschließung $T^{n,j}_{K^j_F}F$ die für $F \in \tilde{C}^n$ bestmögliche Einschließung unter allen Approximationen j-ter Ordnung der Form $T^{n,j}_{K^j}F$ mit $K^j \subset K^j_F$ ist. Insbesondere gilt immer $T^{n,j}_{K^j_F}F \leq T^{n,j}F$.

Für $F \in \tilde{C}^n$ werden die Mengen K^j_F mit wachsendem $j \in \{1,..,n\}$ größer, und es gilt $K^1_F = \emptyset \subset K^2_F \subset \ldots \subset K^n_F$. Somit stellt sich die Frage, welche Aussagen man über die Änderung der Einschließungsschärfe der $T^{n,j}_{K^j_F}F$ machen kann, wenn man verschiedene der Mengen K^j_F, $j \in \{1,..,n\}$, zur Bildung dieser Approximationen für F heranzieht.

Weiterhin wäre es für die Praxis von Nutzen, einen Algorithmus zu kennen, der für gegebenes $F \in \tilde{C}^n$ unter den Approximationen von § 5 und § 7 eine möglichst gute Einschließung für F liefert. Als solche wird man natürlich ein minimales Element von $\langle \{T^{n,1}F,..,T^{n,n}F\} \cup \{T^{n,1}_{K^1_F}F,..,T^{n,n_F}_{K^{n_F}_F}\}, \leq \rangle$ ansehen.

In § 8 soll nun ein Algorithmus (B) konstruiert werden, der für jedes $F \in \tilde{C}^n$ so ein minimales Element liefert.

Der Aufbau von § 8 ist der gleiche wie der von § 6.

In 8.2 werden zunächst Kriterien für die Vergleichbarkeit von Approximationen der Form $T^{n,j}_{K^j_F}F$ für $F \in \tilde{C}^n$ und $j \in \{1,..,n\}$ hergeleitet.

Mit Hilfe dieser Ergebnisse wird dann in 8.3 der erwähnte Algorithmus konstruiert.

In den Aussagen von 8.2 werden zunächst die gewöhnlichen Taylor-Approximationen nicht berücksichtigt. (Lediglich für den Fall j=1 bzw. $K^j_F = \emptyset$ liegt eine gewöhnliche Taylor-Approximation j-ter Ordnung vor.) Wir werden in 8.3 sehen, daß dies gerechtfertigt ist, denn dort wird gezeigt, daß jedes minimale Element von $\langle \{T^{n,1}_{K^1_F}F,..,T^{n,n_F}_{K^{n_F}_F}\}, \leq \rangle$ auch mimimales Element von $\langle \{T^{n,1}F,..,T^{n,n}F\} \cup \{T^{n,1}_{K^1_F}F,..,T^{n,n_F}_{K^{n_F}_F}\}, \leq \rangle$ ist.

In § 8 gelte $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$. Weiter sei $M = [a,b] \in \mathbb{I}$ und $x_0 \in M$ fest.

8.2 Kriterien für die Vergleichbarkeit von Approximationen der Form $T^{n,j}_{K^k_F}F$ für $F \in \tilde{C}^n$

In 8.2 sollen für $F \in \tilde{C}^n$ Aussagen über das Ordnungsverhalten der Einschließungen $T^{n,k}_{K^k_F}F$ und $T^{n,j}_{K^j_F}F$ bzgl. der Ordnung $\leq$ für $k,j \in \{1,..,n\}$ mit $k < j$ gemacht werden. Es werden dabei 3 Fälle unterschieden: 1) $K^k_F \subsetneqq K^j_F$ und $k \in K^j_F$, 2) $K^k_F \subsetneqq K^j_F$ und $k \notin K^j_F$, 3) $K^k_F = K^j_F$.
Bei den Untersuchungen werden zunächst die gewöhnlichen Taylor-Einschließungen für F nicht berücksichtigt, außer in den Fällen, in denen K^j_F leer ist (dann ist ja $T^{n,j}_{K^j_F}F = T^{n,j}F = T^jF$!). Dieser Fall wird später extra untersucht, vgl. 8.3.1.

Es sollen zunächst noch einige Hilfsmittel aus der Intervall-Mathematik bereitgestellt werden.

Hilfssatz 8.2.1
Seien $A,B,C,D \in \mathbb{I}$, dann gilt

(1) Falls $\lambda C \leq \lambda A, \lambda B$, so gilt die Inklusion $A \dot{+} C \subset B \dot{+} C$ genau dann, wenn $A \subset B$ ist.

(2) Falls $\lambda B \leq \lambda A$ ist, so gilt $A \dot{+} B \subset C$ genau dann, wenn $A \subset C - B$ ist.

(3) Falls $\lambda C \leq \lambda(A+B)$ und $\lambda A \leq \lambda D$ ist, so gilt $(A+B) \dot{+} C \subset D$ genau dann, wenn gilt $B \subset (D \dot{-} A) - C$.

Über das Ordnungsverhalten der betrachteten Approximationen kann man nun für den Fall 1) die folgende Aussage machen

Satz 8.2.2
Sei $F \in \tilde{C}^n$ und sei $K^j_F \subsetneqq K^{j+1}_F$ für ein $j \in \{1,..,n-1\}$ (also ist $j \in K^{j+1}_F$). Weiter sei $d_1 = a - x_o$, $d_2 = b - x_o$. Dann folgt

(1) Es kann nicht gelten $T^{n,j}_{K^j_F}F \leq T^{n,j+1}_{K^{j+1}_F}F$.

(2) Es ist $T^{n,j+1}_{K^{j+1}_F}F \leq T^{n,j}_{K^j_F}F$ genau dann, wenn für $i = 1,2$ gilt

$$d_i \frac{F^{(j+1)}(M)}{j+1} \subset F^{(j)}(M) \dot{-} F^{(j)}(x_o).$$

Beweis. (1) Führe die folgenden Bezeichnungen ein: Für $x \in M$, $F \in \tilde{C}^n$ und $j \in \{1,..,n\}$ sei $h = (x - x_o)$ und

$$S^jF(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin K^j_F}}^{j-1} h^k \frac{F^{(k)}(x_o)}{k!} \quad .$$

Sei $K_F^j = \{n_1,..,n_r\}$. Nach Voraussetzung gilt dann $K_F^{j+1} = K_F^j \cup \{j\}$.
(1) Angenommen, es gilt $T^j_{K_F^j} F \subset T^{j+1}_{K_F^{j+1}} F$. Dann gilt für alle $x \in M$

$$(..(S_F^j(x) + h^j \frac{F^{(j)}(M)}{j!}) \dot{+} h^{n_1} \frac{F^{(n_1)}(x_o)}{n_1!} \dot{+} ..) \dot{+} h^{n_r} \frac{F^{(n_r)}(x_o)}{n_r!} \subset$$

$$\subset (..(S_F^{j+1}(x) + h^{j+1} \frac{F^{(j+1)}(M)}{(j+1)!}) \dot{+} h^{n_1} \frac{F^{(n_1)}(x_o)}{n_1!}) \dot{+} ..) \dot{+} h^j \frac{F^{(j)}(x_o)}{j!} .$$

Da es bei der Anwendung der Operation $\dot{+}$ nicht auf die Reihenfolge der Summanden ankommt, so erhält man aus obiger Inklusion wegen HS 8.2.1, (1)

$$(S_F^j(x) + h^j \frac{F^{(j)}(M)}{j!}) \subset (S_F^{j+1}(x) + h^{j+1} \frac{F^{(j+1)}(M)}{(j+1)!}) \dot{+} h^j \frac{F^{(j)}(x_o)}{j!} .$$

Wendet man nun auf diese Inklusion das Funktional λ an und beachtet $\lambda(A \dot{+} B) = \lambda A - \lambda B$, so erhält man

$$\lambda(S_F^j(x)) + |x-x_o|^j \frac{\lambda F^{(j)}(M)}{j!} \leq \lambda(S_F^{j+1}(x)) + |x-x_o|^{j+1} \frac{\lambda F^{(j+1)}(M)}{(j+1)!},$$

da $\lambda(h^j \frac{F^{(j)}(x_o)}{j!}) = |x-x_o|^j \frac{\lambda F^{(j)}(x_o)}{j!} \geqslant 0$ ist. Daraus erhält man schließlich für $x \neq x_o$

$$\lambda F^{(j)}(M) \leq |x-x_o| \frac{\lambda F^{(j+1)}(M)}{j+1} .$$

Für $x \to x_o$ folgt daher $\lambda F^{(j)}(M) = 0$. Wegen $F^{(j)}(x_o) \subset F^{(j)}(M)$ muß also auch gelten $\lambda F^{(j)}(x_o) = 0$. Das ist aber ein Widerspruch zu $j \in K_F^{j+1}$. Also gilt (1).

(2) Es gelte $T^{j+1}_{K_F^{j+1}} F \leq T^j_{K_F^j} F$. Dann gilt für alle $x \in M$

$$(..(S_F^{j+1}(x) + h^{j+1} \frac{F^{(j+1)}(M)}{(j+1)!}) \dot{+} h^{n_1} \frac{F^{(n_1)}(x_o)}{n_1!}) \dot{+} ..) \dot{+} h^j \frac{F^{(j)}(x_o)}{j!} \subset$$

$$\subset (..(S_F^j(x) + h^j \frac{F^{(j)}(x_o)}{j!}) \dot{+} h^{n_1} \frac{F^{(n_1)}(x_o)}{n_1!}) + ..) + h^{n_r} \frac{F^{(n_r)}(x_o)}{n_r!} .$$

Aus HS 8.2.1, (1) und (2) erhält man daraus

$$(S_F^{j+1}(x) + h^{j+1} \frac{F^{(j+1)}(M)}{(j+1)!}) \subset (S_F^j(x) + h^j \frac{F^{(j)}(M)}{j!}) - h^j \frac{F^{(j)}(x_o)}{j!} .$$

Aus der letzten Inklusion erhält man wegen HS 6.2.5

$$h \frac{F^{(j+1)}(M)}{j+1} \subset F^{(j)}(M) - F^{(j)}(x_o)$$

und daraus mit HS 6.2.11 die Behauptung.

Es gelte umgekehrt

$$d_i \frac{F^{(j+1)}(M)}{j+1} \subset F^{(j)}(M) - F^{(j)}(x_o)$$

für i = 1,2. Sei $x \in M$ und $(x-x_o) = h$. Es ist $h \in [d_1,d_2]$, und aus HS 6.2.11 folgt daher

$$h \frac{F^{(j+1)}(M)}{j+1} \subset F^{(j)}(M) - F^{(j)}(x_o).$$

Aus HS 6.2.5 folgt daraus

$$(S_F^{j+1}(x)+h^{j+1}\frac{F^{(j+1)}(M)}{(j+1)!}) \subset (S_F^{j}(x)+h^{j}\frac{F^{(j)}(M)}{j!}) - h^j \frac{F^{(j)}(x_o)}{j!}$$

Für Intervalle $A,B,C \in \mathbb{I}$ mit $\lambda C \leq \lambda A$ folgt aus $A \subset B$ stets $A \dot{+} C \subset B \dot{+} C$. Addiert man auf beiden Seiten der letzten Inklusion den Ausdruck

$$\sum_{i \in K_F^j} h^i \frac{F^{(i)}(x_o)}{i!}$$

mittels $\dot{+}$, so folgt daher

$$T^{n,j+1}_{K_F^{j+1}}F - h^j \frac{F^{(j)}(x_o)}{j!} \subset T^{n,j}_{K_F^j}F - h^j \frac{F^{(j)}(x_o)}{j!}$$

nach Definition von $\dot{+}$. (Der letzte Schritt ist möglich wegen $F \in \tilde{C}^n_{K_F^j}$!)
Nun gilt für $A,B,C \in \mathbb{I}$ die Inklusion $A - C \subset B - C$ genau dann, wenn $A \subset B$ ist. Daraus folgt dann schließlich $T^{n,j+1}_{K_F^{j+1}}F(x) \subset T^{n,j}_{K_F^j}F(x)$. Da $x \in M$ beliebig war, so gilt die Behauptung.

Man kann 8.2.2 verallgemeinern und erhält

Satz 8.2.3

Sei $F \in \tilde{C}^n$ und seien $k,j \in \{1,..,n\}$ mit $k+1 < j$, weiter sei $k \in K_F^j$. Dann folgt:

(1) Es kann nicht gelten $T^{n,k}_{K_F^k}F \leq T^{n,j}_{K_F^j}F$.

(2) Es ist $T^{n,j}_{K_F^j}F \leq T^{n,k}_{K_F^k}F$ genau dann, wenn für alle $x \in M$ gilt ($(x-x_o) = h$!)

$$\left(\sum_{\substack{i<j \\ i \notin K_F^j}} h^{i-k} \frac{F^{(i)}(x_o)}{(k+1)\cdots i} + h^{j-k}\frac{F^{(j)}(M)}{(k+1)\cdots j}\right) \subset$$

$$(F^{(k)}(M) - F^{(k)}(x_o)) - \left(\sum_{i \in K_F^j} h^{i-k}\frac{F^{(i)}(x_o)}{(k+1)..i}\right).$$

Beweis. Zum Beweis von 8.2.3 benötigt man im wesentlichen die gleichen Argumente und Hilfsmittel wie bei 8.2.2. Auf eine Durchführung soll daher verzichtet werden.

Beispiel 8.2.3'

Sei $F:M\to\mathbb{R}$ mit $M = [-1,o]$, $x_o = -1$ und $F(x) = [x^3, e^x]$. Weiter sei $n = 5$. Es ist $F\in\tilde{C}^5$, und mittels Schema (S) aus § 7 folgt $K_F^5 = \{1,3\}$.
Es soll untersucht werden, ob $T^{5,3}_{K_F^3}F$ und $T^{5,5}_{K_F^5}F$ vergleichbar sind bzgl. $\leq$.
Es ist $3\in K_F^5$, wegen 8.2.3,(1) kann daher nicht $T^{5,3}_{K_F^3}F \leq T^{5,5}_{K_F^5}F$ gelten.

Es ist $F'''(M) = F'''(x_o) = [1/e,6]$, $F^{(4)}(x_o) = [o,1/e]$ und $F^{(5)}(M) = [o,1]$.
Wegen 8.2.3,(2) ist $T^{5,5}_{K_F^5}F \leq T^{5,3}_{K_F^3}F$ genau dann, wenn für alle $x\in M$

$$(x-x_o)F^{(4)}(x_o)/4 + (x-x_o)^2F^{(5)}(M)/4\cdot 5 \subset F'''(M) - F'''(x_o)$$

ist. Dies ist gleichwertig mit $[o,((x+1)e/4) + ((x+1)^2/2o)] \subset [-6+(1/e),6-(1/e)]$ für alle $x\in M$. Die letzte Inklusion ist aber offensichtlich für alle $x\in M$ gültig, und damit gilt $T^{5,5}_{K_F^5}F \leq T^{5,3}_{K_F^3}F$.

Für den Fall 2), d.h. $K_F^k \supsetneq K_F^j$ und $k\notin K_F^j$, sind ähnliche Aussagen gültig wie für den Fall 1). Es gilt:

Satz 8.2.4

Seien $k,j\in\{1,..,n\}$ mit $k+1 < j$. Weiter gelte für $F\in\tilde{C}^n$ $K_F^k \subsetneq K_F^j$, und es sei $k\notin K_F^j$. Dann folgt mit den Bezeichnungen $K_F^{j,k} = K_F^j\setminus K_F^k$ und $h = (x-x_o)$:

(1) Es kann nicht $T^{n,k}_{K_F^k}F \leq T^{n,j}_{K_F^j}F$ gelten

(2) Es ist $T^{n,j}_{K_F^j}F \leq T^{n,k}_{K_F^k}F$ genau dann, wenn für alle $x\in M$ gilt

$$\Big(\sum_{\substack{i<k+1\\ i\notin K_F^j}}^{j-1} h^{i-k}\frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!} + h^{j-k}\frac{F^{(j)}(M)}{(k+1)..j}\Big) \subset$$

$$(F^{(k)}(M) \ominus F^{(k)}(x_o)) - \Big(\sum_{i\in K_F^{j,k}} h^{i-k}\frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!}\Big).$$

Beweis. (1) Angenommen, es gilt $T^{n,k}_{K_F^k}F \leq T^{n,j}_{K_F^j}F$. Mit schon mehrfach benutzten Argumenten folgt daraus für alle $x\in M$ die Gültigkeit von

$$h^k\frac{F^{(k)}(M)}{k!} - \Big(\sum_{i\in K_F^{j,k}} h^i\frac{F^{(i)}(x_o)}{i!}\Big) \subset \Big(\sum_{\substack{i<k\\ i\notin K_F^j}}^{j-1} h^i\frac{F^{(i)}(x_o)}{i!} + h^j\frac{F^{(j)}(M)}{j!}\Big).$$

Aus dieser Inklusion folgt nun $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ und für alle $x\in M$ die Inklusion

$$(\alpha)\quad -\Big(\sum_{i\in K_F^{j,k}} h^{i-k-1}\frac{F^{(i)}(x_o)}{(k+1)\ i}\Big) \subset \Big(\sum_{\substack{i<k+1\\ i\notin K_F^j}}^{j-1} h^{i-k-1}\frac{F^{(i)}(x_o)}{(k+1)\ i} + h^{j-k-1}\frac{F^{(j)}(M)}{(k+1)\cdot j}\Big).$$

Wir stellen weiter fest, daß $\lambda F^{(k)}(x_o) > o$ ist. Denn sonst wäre wegen $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ $F^{(k+1)} = 0$, woraus insbesondere $K_F^k = K_F^j$ folgen würde.

Fallunterscheidung:

Wir nehmen zunächst an, daß $x_o = b$ ist. Weiter sei etwa k gerade. Wegen $k \notin K_F^j$ muß dann nach Schema (S) aus § 7 $(\lambda F)^{(k)}(x_o) \geq o$ gelten. Damit folgt $(\lambda F)^{(k)}(x_o) = \lambda F^{(k)}(x_o) = \lambda F^{(k)}(M)$, d.h. $(\lambda F)^{(k)}$ besitzt in x_o ein (globales) Maximum.

Die folgenden Aussagen werden noch häufig benötigt:

Seien $f:[a,b) \to \mathbb{R}$, $g:(a,b] \to \mathbb{R}$, $a,b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Dann gilt:

(β) Falls f in a ein lokales Maximum (Minimum) besitzt und $f'_+(a)$ existiert, dann ist $f'_+(a) \leq o$ ($\geq o$).

Falls f k-mal differenzierbar ist in a ($k \geq 2$), ein lokales Maximum (Minimum) in a besitzt, und falls $f'(a) = f''(a) = .. = f^{(k-1)}(a) = o$ ist, dann folgt $f^{(k)}(a) \leq o$ ($\geq o$).

(γ) Falls g in b ein lokales Maximum (Minimum) besitzt und $g'_-(b)$ existiert, dann folgt $g'_-(b) \geq o$ ($\leq o$).

Falls g k-mal differenzierbar ist in b ($k \geq 2$), $g'(b) = g''(b) = .. = g^{(k-1)}(b) = o$ erfüllt und in b ein lokales Maximum (Minimum) besitzt, dann folgt $g^{(k)}(b) \leq o$ ($\geq o$), falls k gerade ist, bzw. $g^{(k)}(b) \geq o$ ($\leq o$), falls k ungerade ist.

Da $(\lambda F)^{(k)}$ in b ein (globales) Maximum besitzt, so folgt nach (γ) $(\lambda F)^{(k+1)}(b) \geq 0$. Angenommen, $(\lambda F)^{(k+1)}(b) > 0$. Da k+1 ungerade ist und $x_o = b$, so ist dann wegen Schema (S) aus § 7 $(k+1) \in K_F^{j,k} = K_F^j \setminus K_F^k$. Andererseits erhält man aber aus (α) zusammen mit HS 6.2.5 die Inklusion $F^{(k+1)}(x_o) = \dot{Q}$ und damit insbesondere $(\lambda F)^{(k+1)}(x_o) = o$, also einen Widerspruch. Also muß gelten $(\lambda F)^{(k+1)}(x_o) = o$.

Da $(\lambda F)^{(k)}$ in $x_o = b$ ein Maximum hat und k+2 gerade ist, so erhält man nun aus (γ) $(\lambda F)^{(k+2)}(b) \leq o$. Wäre $(\lambda F)^{(k+1)}(x_o) < o$, so müßte nach Schema (S) $(k+2) \in K_F^{j,k}$ gelten. Wegen $F^{(k+1)}(x_o) = \dot{Q}$ erhält man nun aber zusammen mit HS 6.2.5 wieder aus (α) $F^{(k+2)}(x_o) = \dot{c}$. Es muß also $(\lambda F)^{(k+2)}(b) = o$ sein. Zusammen mit (α) erhält man daraus $F^{(k+2)}(b) = 0$.

Setzt man diese Schlußweise fort, so erhält man schließlich:

Für alle $r \in \{k+1,..,j-1\}$ gilt $(\lambda F)^{(r)}(b) = o$.

Daraus erhält man nun wegen $k \notin K_F^j$ sofort $K_F^j = K_F^k$ und damit einen Widerspruch zur Voraussetzung.

Den Fall $x_o = a$ beweist man ähnlich wie den Fall $x_o = b$.

Sei nun $x_o \in \overset{\circ}{M}$. Nach Konstruktion von Schema (S) gilt nun $K_F^j = K_{F_\alpha}^j \cap K_{F_b}^j$. (Wegen der Bezeichnungen vergl. § 7.2.) Also ist die Voraussetzung $k \notin K_F^j$ gleichwertig mit $k \notin K_{F_\alpha}^j$ oder $k \notin K_{F_b}^j$. Es trete etwa der erste Fall ein.

Wir hatten angenommen, daß $T^{n,k}_{K^k_F} \leq T^{n,j}_{K^j_F}$ gilt. Dann ist aber insbesondere $T^{n,k}_{K^k_F} a \leq T^{n,j}_{K^j_F} a$. Wegen $k \notin K^j_{F_a}$ erhält man nun durch die gleichen Schlüsse wie im Fall $x_o = b$ $K^j_{F_a} \cap \{k+1,..,j-1\} = \emptyset$. Wegen $K^j_F = K^j_{F_1} \cap K^j_{F_b}$ erhält man schließlich den Widerspruch $K^j_F = K^k_F$.

Damit ist Teil (1) von 8.2.4 bewiesen.

(2) Für $x \in M$ sei $S^k F(x) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \notin K^k_F}}^{k-1} h^i \frac{F^{(i)}(x_o)}{i!}$.

Es gelte $T^{n,j}_{K^j_F} \leq T^{n,k}_{K^k_F}$. Mit 8.2.1 folgt daraus für $x \in M$ und mit $K^j_F \setminus K^k_F = \{n_r,..,n_s\}$

$$(..(S^j F(x) + h^j \frac{F^{(j)}(M)}{j!}) \dot{+} h^{n_r} \frac{F^{(n_r)}(x_o)}{n_r!}) \dot{+} ..) \dot{+} h^{n_s} \frac{F^{(n_s)}(x_o)}{n_s!}$$

$$\subset S^k F(x) + h^k \frac{F^{(k)}(M)}{k!}.$$

Damit erhält man dann aus 8.2.1 die Inklusion

$$\sum_{\substack{i=K \\ i \notin K^j_F}}^{j-1} h^i \frac{F^{(i)}(x_o)}{i!} + h^j \frac{F^{(j)}(M)}{j!} \subset h^k \frac{F^{(k)}(M) \ominus F^{(k)}(x_o)}{k!} - \sum_{i \in K^{j,k}} h^i \frac{F^{(i)}(x_o)}{i!}$$

für alle $x \in M$. Multiplikation dieser Inklusion mit $k!/(x-x_o)^k$ für $x \neq x_o$ liefert dann wegen 6.2.5 die Behauptung.

Die Umkehr dieser Behauptung erfolgt nun mit ähnlichen Argumenten.

Nach Multiplikation der Inklusion in (2) mit $(x-x_o)^k/k!$ erhält man wegen der Gültigkeit der folgenden Aussage für Intervalle $A,B,C \in \mathbb{I}$

'falls $A \subset B \ominus C$ und $\lambda B \geq \lambda C$ ist, dann folgt $A + C \subset B$'

die folgende Inklusion

$$\sum_{\substack{i=K \\ i \notin K^j_F}}^{j-1} h^i \frac{F^{(i)}(x_o)}{i!} + h^j \frac{F^{(j)}(M)}{j!} \subset h^k \frac{F^{(k)}(M)}{k!} - (\sum_{i \in K^{j,k}_F} h^i \frac{F^{(i)}(x_o)}{i!}).$$

Addiert man auf beiden Seiten dieser Inklusion den Term $S^k F(x)$, $x \in M$, so erhält man aus der Isotonie der Intervall-Addition

$$S^j F(x) + h^j \frac{F^{(j)}(M)}{j!} \subset S^k F(x) + h^k \frac{F^{(k)}(M)}{k!} - (\sum_{i \in K^{j,k}_F} h^i \frac{F^{(i)}(x_o)}{i!})$$

für alle $x \in M$. Nun gilt für Intervalle $A,B,C,D \in \mathbb{I}$:

Falls $A \subset B - C$ ist und $\lambda C \leq \lambda A$ gilt, dann folgt $A \dot{+} C \subset B$. Ist weiter $\lambda D \leq \lambda(A \dot{+} C)$, dann folgt $(A \dot{+} C) \dot{+} D = A \dot{+} (C + D) \subset B \dot{+} D$.

Wendet man diese Beziehungen mit

$$B = \sum_{i \in K^{j,k}_F} h^i \frac{F^{(i)}(x_o)}{i!} \quad \text{und} \quad D = \sum_{i \in K^k_F} h^i \frac{F^{(i)}(x_o)}{i!}$$

auf die letzte Inklusion an, so erhält man die Behauptung.

Für den Fall der Gleichheit der Mengen K_F^k und K_F^j erhalten wir schon aus § 6 her bekannte Kriterien. Es gilt

Satz 8.2.5

Sei $F \in \mathring{C}^n$, und es gelte $K_F^j = K_F^{j+1}$ für ein $j \in \{1,..,n-1\}$. Weiter sei für das zugrunde liegende Intervall $M = [a,b]$ und für $x_o \in M$ fest $d_1 = a-x_o$ und $d_2 = b-x_o$. Dann folgt:

(1) Es ist $T^{n,j}_{K_F^j} F \leq T^{n,j+1}_{K_F^{j+1}} F$ genau dann, wenn gilt $F^{(j)}(M) = F^{(j)}(x_o)$.

(2) Es ist $T^{n,j+1}_{K_F^{j+1}} F \leq T^{n,j}_{K_F^j} F$ genau dann, wenn für $i = 1,2$ die folgende Inklusion gilt

$$d_i \frac{F^{(j+1)}(M)}{(j+1)} \subset F^{(j)}(M) \ominus F^{(j)}(x_o) .$$

Beweis. (1) Für $x \in M$ sei $S^j F$ wie im Beweis von 8.2.4,(b) definiert. Wegen 8.2.1 ist nun die Behauptung gleichwertig mit der Inklusion für alle $x \in M$

$$S^j F(x) + h^j \frac{F^{(j)}(M)}{j!} \subset S^{j+1} F(x) + h^{j+1} \frac{F^{(j+1)}(M)}{(j+1)!} .$$

Da $j \notin K_F^{j+1}$ ist, so erhält man nun die Behauptung ähnlich wie in 6.2.12.

(2) In diesem Falle schließt man ähnlich wie in (1).

Es gilt folgende Verallgemeinerung von 8.2.5

Satz 8.2.6

Sei $F \in \mathring{C}^n$, und es sei $K_F^k = K_F^j$ für $k,j \in \{1,..,n\}$ mit $(k+1) < j$. Dann folgt:

(1) Es ist $T^{n,k}_{K_F^k} F \leq T^{n,j}_{K_F^j} F$ genau dann, wenn

(a) $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ ist und

(b) für alle $x \in M$ gilt mit $h = (x-x_o)$

$$(-F^{(k+1)}(x_o)) \cap (h \frac{F^{(k+2)}(x_o)}{(k+2)} + .. + h^{j-k-1} \frac{F^{(j)}(M)}{(k+2)..j}) \neq \emptyset .$$

(2) Es ist $T^{n,j}_{K_F^j} F \leq T^{n,k}_{K_F^k} F$ genau dann, wenn für alle $x \in M$ gilt

$$h \frac{F^{(k+1)}(x_o)}{k+1} + .. + h^{j-k} \frac{F^{(j)}(M)}{(k+1)..j} \subset F^{(k)}(M) \ominus F^{(k)}(x_o) .$$

Den Beweis von 8.3.6 erhält man mit derselben Vorüberlegung wie in 8.3.5 sofort aus 6.2.15.

Als nächstes sollen die I-Funktionen $F \in \mathring{C}^n$ charakterisiert werden, für die die Gleichheit $T^{n,j}_{K_F^j} F = T^{n,k}_{K_F^k} F$ für $k,j \in \{1,..,n\}$ und $k < j$ eintreten kann.

Satz 8.2.7

Sei $F \in \tilde{C}^n$ und seien $k,j \in \{1,..,n\}$ mit $k < j$. Dann folgt

(1) Falls $K_F^k \subseteq K_F^j$ ist, dann gilt immer $T^{n,k}_{K_F^k} F \neq T^{n,j}_{K_F^j} F$.

(2) Für $K_F^k = K_F^j$ tritt genau dann Gleichheit ein, falls $F^{(k+1)} = \dot{0}$ ist.

Beweis. (1) wurde schon in 8.2.3 bzw. in 8.2.4 gezeigt.

(2) Es gelte für $F \in \tilde{C}^n$ $T^{n,k}_{K_F^k} F = T^{n,j}_{K_F^j} F$. Dann folgt aus 8.2.6,(1) $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ und damit aus 8.2.6,(2) die Inklusion

$$(x-x_o)(F^{(k+1)}(x_o)/(k+1)) + .. + (x-x_o)^{j-k}(F^{(j)}(M)/(k+1)..j) \subset \dot{0}$$

für alle $x \in M$. Aus dieser Inklusion erhält man wiederum

$$F^{(k+1)}(x_o) = F^{(k+2)}(x_o) = .. = F^{(j)}(M) = \dot{0} .$$

Aus dieser Kette von Gleichheiten erhält man schließlich durch sukzessives Anwenden von 3.5.3 die Behauptung.

Die Umkehr von (2) erhält man leicht mit Hilfe von 8.2.6.

Beispiel 8.2.8

Sei $M = [-1,0]$, $x_o = 0$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [x^3, e^x]$ und $n = 6$.
Es ist $F \in \tilde{C}^6$, und man erhält aus dem Schema (S) $K_F^2 = .. = K_F^5 = \{1\}$ und $K_F^6 = \{1,5\}$.
Wegen $K_F^4 = K_F^5$ und $F^{(4)}(M) = F^{(4)}(x_o)$ erhält man aus 8.2.5 $T^{6,4}_{K_F^4} F \leq T^{6,5}_{K_F^5} F$.
Für $k = 4$, $j = 6$ erhält man wegen $K_F^4 \subseteq K_F^6$ aus 8.2.4, daß der Fall $T^{6,4}_{K_F^4} F \leq T^{6,6}_{K_F^6} F$ nicht eintreten kann.
Aus 8.2.4 erhält man weiter, daß die Gültigkeit von $T^{6,6}_{K_F^6} F \leq T^{6,4}_{K_F^4} F$ gleichwertig ist mit der Gültigkeit folgender Inklusion ($F^{(4)}(M) = F^{(4)}(x_o)$!)

$$4!(x-x_o)^2 F^{(6)}(M)/6! \subset -4!(x-x_o)F^{(5)}(x_o)/5! \quad \text{für alle } x \in M.$$

Wegen $F^{(6)}(M) = F^{(5)}(x_o) = [0,1]$ ist die letzte Bedingung gleichwertig zu

$$[x/30,0] \subset [-1/5,0] \text{ für alle } x \in M,$$

und diese Inklusion gilt für alle $x \in M$.
Also gilt auch $T^{6,6}_{K_F^6} F \leq T^{6,4}_{K_F^4} F$ und daher insbesondere auch $T^{6,6}_{K_F^6} F \leq T^{6,5}_{K_F^5} F$.
Wegen $K_F^2 = K_F^3$ und $d_1 F^{(3)}(M) = d_1[1/3e,2] \subset F^{(2)}(M) \ominus F^{(2)}(x_o) = [-6,0]$, wobei $d_1 = -1$ und $d_2 = 0$ ist, erhält man aus 8.2.5 die Gültigkeit von $T^{6,3}_{K_F^3} F \leq T^{6,2}_{K_F^2} F$.
Für $k = 3$, $j = 6$, $K_F^3 \subseteq K_F^6$ und $3 \notin K_F^6$ erhält man aus 8.2.4 wegen

$$3!(x-x_o)F^{(4)}(x_o)/4! + 3!(x-x_o)^3 F^{(6)}(M)/6! = [x/4 + x^3/120,0] \subset$$

$$\subset [-1 + 1/e - x^2/20,0] = (F^{(3)}(M) \ominus F^{(3)}(x_o)) - 3!(x-x_o)^2 F^{(5)}(x_o)/5!$$

für alle $x \in M$ die Gültigkeit von $T^{6,6}_{K^6_F} F \leq T^{6,3}_{K^3_F} F$. Insbesondere gilt also auch $T^{6,6}_{K^6_F} F \leq T^{6,2}_{K^2_F} F$.

Damit ist gezeigt, daß $T^{6,6}_{K^6_F} F$ kleinstes Element der geordneten Menge $\langle \{T^{6,2}_{K^2_F} F, .., T^{6,6}_{K^6_F} F\}, \leq \rangle$ ist.

Da $k_o = 4$ das kleinste $k \in \{1,..,5\}$ mit $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ ist, so ist unter den gewöhnlichen Taylor-Approximationen für F $T^4 F$ die bestmögliche Einschließung. Man kann zeigen, daß $T^{6,6}_{K^6_F} F \leq T^4 F$ ist und daß hier keine Gleichheit eintreten kann. Mit $T^{6,6}_{K^6_F} F$ erhält man also eine echte Verbesserung der Einschließung für F bzgl. der gewöhnlichen Taylor-Einschließungen.

Beispiel 8.2.9

Sei $M = [-1,0]$, $x_o = -1$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \to [x^5, e^x]$ und $n = 7$.

Es ist $F \in \tilde{C}^7$, und man berechnet nach Schema (S): $K^2_F = K^3_F = \{1\}$, $K^4_F = K^5_F = \{1,3\}$ und $K^6_F = K^7_F = \{1,3,5\}$.

Wegen $K^5_F \subsetneq K^6_F$ kann nach 8.2.2 nicht gelten $T^{7,5}_{K^5_F} F \leq T^{7,6}_{K^6_F} F$.

Für $d_1 = 0$ und $d_2 = 1$ gilt

$$d_i F^{(6)}(M)/6 = d_i [0, 1/6] \subset [-120 + 1/e, 120 - 1/e] = F^{(5)}(M) - F^{(5)}(x_o).$$

Also folgt wegen 8.2.2 $T^{7,6}_{K^6_F} F \leq T^{7,5}_{K^5_F} F$.

Wegen $K^6_F = K^7_F$ und $F^{(6)}(M) \neq F^{(6)}(x_o)$ kann nach 8.2.5 nicht $T^{7,6}_{K^6_F} F \leq T^{7,7}_{K^7_F} F$ gelten. Andererseits ist

$$d_i F^{(7)}(M)/7 = d_i [0, 1/7] \subset [0, 1 - 1/e] = F^{(6)}(M) \ominus F^{(6)}(x_o) \quad \text{für } i = 1,2,$$

und daher gilt nach 8.2.5 $T^{7,7}_{K^7_F} F \leq T^{6,6}_{K^6_F} F$. Insbesondere ist auch noch $T^{7,7}_{K^7_F} F \leq T^{7,5}_{K^5_F} F$.

Da für $j = 2,3,4$ jeweils $K^j_F \subsetneq K^7_F$ ist, so kann für keines dieser j der Fall $T^{7,j}_{K^j_F} F \leq T^{7,7}_{K^7_F} F$ eintreten, d.h. $T^{7,7}_{K^7_F} F$ ist minimales Element.

Da $k_o = 5$ das kleinste $k \in \{1,..,6\}$ ist mit $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$, so ist nach 6.3.7 $T^5 F$ die bestmögliche Einschließung für F unter den gewöhnlichen Taylor-Einschließungen $T^1 F, .., T^7 F$ für F. Man kann zeigen, daß $T^{7,7}_{K^7_F} F$ im Vergleich zu $T^5 F$ eine echte Verbesserung der Einschließung bringt, d.h. es gilt $T^{7,7}_{K^7_F} F \leq T^5 F$, und es besteht keine Gleichheit.

Beispiel 8.2.10

Sei $M = [1,2]$, $x_o = 1$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \to [-1,1]\, 1/x$ und $n = 5$.

Dann ist $F^{(k)}(x) = [-1,1]\, k!/x^{k+1}$ für $x \in M$ und $k = 1,..,5$, und es gilt $F \in \tilde{C}^5$.

Wegen $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ für $k = 1,..,5$ gilt weiter $T^{5,1} F \leq \ldots \leq T^{5,5} F$,

d.h. die Einschließungen für F durch die gewöhnlichen Taylor-Approximationen werden mit wachsendem n schlechter.

Mit Hilfe von Schema (S) aus § 7 erhält man $K_F^2 = K_F^3 = \{1\}$ und $K^4 = K^5 = \{1,3\}$.

Wegen $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ für $k = 1,..,4$ erhält man daraus wegen 8.2.5

$T^{5,2}_{K_F^2}F \leq T^{5,3}_{K_F^3}F$ und $T^{5,4}_{K_F^4}F \leq T^{5,5}_{K_F^5}F$.

Es ist $K_F^2 \subsetneq K_F^4$, und daher kann nicht $T^{5,2}_{K_F^2}F \leq T^{5,4}_{K_F^4}F$ gelten.

Wegen $2 \notin K_F^4$ gilt mit $k = 2$, $j = 4$ nach 8.2.4 : Es ist $T^{5,4}_{K_F^4}F \leq T^{5,2}_{K_F^2}F$ genau dann, wenn $2!(x-x_o)^2 F^{(4)}(M)/4! \subset -2!(x-x_o)F^{(3)}(x_o)/3!$ für alle $x \in M$.

Die letzte Aussage wiederum ist gleichwertig zur folgenden:

Für alle $x \in M$ ist $[-2,2](x-1) \subset [-2,2]$. Da die letzte Inklusion für alle $x \in M$ gilt, so ist also nach 8.2.4 $T^{5,4}_{K_F^4}F \leq T^{5,2}_{K_F^2}F$.

Insgesamt folgt damit, daß $T^{5,4}_{K_F^4}F$ kleinstes Element von $\langle \{T^{5,1}_{K_F^1}F,..,T^{5,5}_{K_F^5}F\}, \leq \rangle$ ist.

Nach 6.3.7 ist T^1F minimales Element von $\langle \{T^1F,..,T^5F\}, \leq \rangle$. Man kann auch für dieses Beispiel zeigen, daß $T^{5,4}_{K_F^4}F \leq T^{5,1}F$ ist und daß keine Gleichheit eintritt, d.h. daß man mit den Methoden von § 7 echte Einschließungsverbesserungen für F erhält.

8.3 Ein Algorithmus zur Angabe eines minimalen Elementes der geordneten Menge $\langle \{T^{n,1}_{K^1_F}F,..,T^{n,n}_{K^n_F}F\}, \leq \rangle$ für $F \in \tilde{C}^n$

Mit Hilfe der Aussagen von 8.2 soll in 8.3 ein Algorithmus angegeben werden, der für jedes $F \in \tilde{C}^n$ ein minimales Element der geordneten Menge $\langle \{T^{n,1}_{K^1_F}F,..,T^{n,n}_{K^n_F}F\}, \leq \rangle$ angibt, wobei $K^n_F \neq \emptyset$ vorausgesetzt ist.
In den Aussagen von 8.2 wurden die gewöhnlichen Taylor-Approximationen $T^{n,1}F,..,T^{n,n}F$ für $F \in \tilde{C}^n$ noch nicht berücksichtigt. Wir hatten zwar festgestellt, daß für jedes $F \in \tilde{C}^n$ stets $T^{n,j}_{K^j_F}F \leq T^{n,j}F$ ist. Daraus wird aber i.a. nicht die Gültigkeit von $T^{n,j}_{K^j_F}F \leq T^{n,k}F$ für $k,j \in \{1,..,n\}$ und $k \neq j$ folgen.
Wir werden aber im folgenden Satz zeigen, daß gewisse minimale Elemente von $\langle \{T^{n,1}_{K^1_F}F,..,T^{n,n}_{K^n_F}F\}, \leq \rangle$ stets auch minimales Element der geordneten Menge $\langle \{T^{n,1}F,..,T^{n,n}F\} \cup \{T^{n,1}_{K^1_F}F,..,T^{n,n}_{K^n_F}F\}, \leq \rangle$ sind; d.h. insbesondere, daß die gewöhnlichen Taylor-Approximationen $T^{n,k}F$ zumindest keine besseren Einschließungen als diese minimalen Elemente liefern.
Damit erübrigt es sich dann auch, die Aussagen aus 8.2 auf die gewöhnlichen Taylor-Approximationen zu übertragen.

Satz 8.3.1
Sei $T^{n,s}_{K^s_F}F$ minimales Element von $\langle \{T^{n,1}_{K^1_F}F,..,T^{n,n}_{K^n_F}F\}, \leq \rangle$ mit $K^s_F \neq \emptyset$ für $F \in \tilde{C}^n$, $s \in \{1,..,n\}$. Dann ist $T^{n,s}_{K^s_F}F$ auch minimales Element der geordneten Menge $\langle \{T^{n,1}F,..,T^{n,n}F\} \cup \{T^{n,1}_{K^1_F}F,..,T^{n,n}_{K^n_F}F\}, \leq \rangle$.

Beweis. Angenommen, es gibt ein $j \in \{1,..,n\}$ mit $T^{n,j}F \leq T^{n,s}_{K^s_F}F$, und es besteht keine Gleichheit. Nun gilt insbesondere $T^{n,j}_{K^j_F}F \leq T^{n,j}F$ nach 7.3.7 . Daraus erhält man dann $T^{n,j}_{K^j_F}F \leq T^{n,s}_{K^s_F}F$, und es tritt keine Gleichheit ein. Das ist aber ein Widerspruch dazu, daß $T^{n,s}_{K^s_F}F$ minimales Element von $\langle \{T^{n,1}_{K^1_F}F,..,T^{n,n}_{K^n_F}F\}, \leq \rangle$ ist.

Sei nun $F \in \tilde{C}^n$ mit $K^n_F \neq \emptyset$ und sei $K^n_F = \{n_1,..,n_r\}$. Weiter sei $M_0 = \{1,..,n_1\}$, $M_1 = \{n_1+1,..,n_2\},..,$ $M_r = \{n_r+1,..,n\}$. Wegen $n_r < n$ ist auch $M_r \neq \emptyset$, und die Menge $\{1,..,n\}$ ist darstellbar als disjunkte Vereinigung der M_i, $i = 0,1,..,r$. Für alle $i = 1,..,r$ gilt $n_i \notin M_i$.
Dann gilt mit diesen Bezeichnungen
Satz 8.3.2
Sei $F \in \tilde{C}^n$ mit $K^n_F \neq \emptyset$. Dann besitzt jede der geordneten Mengen $\langle \{T^{n,j}_{K^j_F}F \;/\; j \in M_i\}, \leq \rangle$, $i = 0,..,r$, ein minimales Element, und Anwenden des Algorithmus (A) aus § 6 liefert jeweils ein solches.

Beweis. Sei $i \in \{0,..,r\}$ beliebig. Nach Konstruktion gilt dann für alle $k,j \in M_i$ mit $k \neq j$ $K_F^j = K_F^k$. Wegen 8.2.5 und 8.2.6 gelten nun die gleichen Kriterien für die Vergleichbarkeit der $T^{n,k}_{K_F^k}F$ und $T^{n,j}_{K_F^j}F$ wie in § 6 für $T^{n,k}F$ und $T^{n,j}F$. Also kann man auch mit Hilfe des Algorithmus Ⓐ aus § 6 ein minimales Element von $\langle \{T^{n,j}_{K_F^j}F / j \in M_i\}, \leq \rangle$ angeben.

Satz 8.3.3

Sei $F \in \tilde{C}^n$ mit $K_F^n = \{n_1,..,n_r\} \neq \emptyset$. Weiter sei $s \in M_r = \{n_r+1,..,n\}$ nach Algorithmus Ⓐ aus § 6 bestimmt (was ja nach 8.3.2 immer möglich ist). Dann ist $T^{n,s}_{K_F^s}F$ minimales Element von $\langle \{T^{n,1}_{K_F^1}F,..,T^{n,n_r}_{K_F^{n_r}}F\}, \leq \rangle$ und damit auch von $\langle \{T^{n,1}F,..,T^{n,n_r}F\} \cup \{T^{n,1}_{K_F^1}F,..,T^{n,n_r}_{K_F^{n_r}}F\}, \leq \rangle$.

Beweis. Es ist $K_F^s = K_F^n$ nach Konstruktion. Zunächst folgt daher aus 8.2.3 und aus 8.2.4, daß für kein $j \leq n_r$ $T^{n,j}_{K_F^j}F \leq T^{n,s}_{K_F^s}F$ gelten kann. Sei nun $j \in M_r$. Da s nach dem Algorithmus Ⓐ aus § 6 bestimmt ist, so ist nach 8.3.2 $T^{n,s}_{K_F^s}F$ minimal in $\langle \{T^{n,j}_{K_F^j}F / j \in M_r\}, \leq \rangle$. Also gilt die Behauptung nach 8.3.1.

Nun ist man in der Lage, einen Algorithmus Ⓑ anzugeben, der für jedes $F \in \tilde{C}^n$ ein minimales Element von $\langle \{T^{n,1}F,..,T^{n,n_r}F\} \cup \{T^{n,1}_{K_F^1}F,..,T^{n,n_r}_{K_F^{n_r}}F\}, \leq \rangle$ liefert.

Algorithmus Ⓑ

Voraussetzungen: Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $M \in \mathbb{M}$ und $x_0 \in M$ fest. Weiter sei $F \in \tilde{C}^n(M, \mathbb{M})$.

(1) Eingabe der Menge $K_F^n = \{n_1,..,n_r\}$ und der Werte $F^{(k)}(M)$, $F^{(k)}(x_0)$ für $k = 1,..,n-1$.

(2) Bestimmung der Indexmenge J:

Sei $$M_r' = \begin{cases} M_r \setminus \{n\}, & \text{falls } K_F^n \neq \emptyset \\ \{1,..,n-1\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiter sei $J = \{k \in M_r' / F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_0)\}$.

(3) Bestimmung der Ordnung eines minimalen Elements:

Sei

$$s = \begin{cases} n, & \text{falls } J = \emptyset \text{ ist} \\ \min\{k / k \in J\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(4) Dann ist $T^{n,s}_{K_F^s}F$ ein minimales Element der geordneten Menge $\langle \{T^{1,1}F,..,T^{n,n_r}F\} \cup \{T^{n,1}_{K_F^1}F,..,T^{n,n_r}_{K_F^{n_r}}F\}, \leq \rangle$.

Beispiel 8.3.4

Es gelten die Voraussetzungen von 8.2.8. Dann ist also $n = 6$ und weiter $K_F^6 = \{1,5\} \neq \emptyset$. Es ist $M_r' = \emptyset$ und daher $s = 6$. Also ist $T_{K_F^6}^{6,6}F$ bestmögliche Einschließung für F unter allen Taylor-Approximationen der Ordnung ≤ 6 und ihren Verbesserungen mittels Pseudoaddition.

Beispiel 8.3.4

Es gelten die Voraussetzungen von 8.2.9. Dann ist also $n = 7$, und die Menge $K_F^7 = \{1,3,5\}$ ist nicht leer. Weiter ist $M_r' = \{6\}$ und wegen $F^{(6)}(M) \neq F^{(6)}(x_o)$ daher $J = \emptyset$. Also ist $s = 7$ und $T_{K_F^7}^{7,7}F$ das gesuchte minimale Element.

Beispiel 8.3.5

Sei $M = [1,2]$, $x_o = 1$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \longmapsto [\ln x, e^x]$, und sei $n = 10$.
Dann gilt für $k \in \{1,..,10\}$ $F^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}((k-1)!/x^k) \vee e^x$ für alle $x \in M$.
Also ist $F \in \tilde{C}^{10}$. Für $j \in \{7,9\}$ ist $F^{(j)}(M) = F^{(j)}(x_o)$. Für alle anderen $j \in \{1,..,10\}$ ist $F^{(j)}(M) \neq F^{(j)}(x_o)$.
Weiter ist $K_F^{10} = \{5,7,9\}$. Also ist $M_r = M_3 = \{10\}$ und damit $M_r' = \emptyset$.
Damit erhält man als minimales Element die Approximation $T_{K_F^{10}}^{10,10}F$.

Als nächstes soll ein Kriterium dafür angegeben werden, wann ein nach dem Algorithmus (B) erhaltenes minimales Element auch kleinstes Element von $\langle \{T_{K_F^n}^{n,1}F,..,T_{K_F^n}^{n,n}F\}, \leq \rangle$ und damit auch kleinstes Element von $\langle \{T^{n,1}F,..,T^{n,n}F\} \cup \{T_{K_F^n}^{n,1}F,..,T_{K_F^n}^{n,n}F\}, \leq \rangle$ ist.

Satz 8.3.6

Sei $F \in \tilde{C}^n$ und $s \in \{1,..,n\}$ nach Algorithmus (B) bestimmt. Dann folgt:

(1) Falls $s = n$ ist, dann ist $T_{K_F^n}^{n,s}F$ genau dann kleinstes Element von $\langle \{T_{K_F^n}^{n,1}F,..,T_{K_F^n}^{n,n}F\}, \leq \rangle$, wenn für jedes $k \in \{1,..,n-1\}$ und für alle $x \in M$

$$\sum_{\substack{i=k+1 \\ i \notin K_F^n}}^{n-1} h^{i-k} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!} + h^{n-k} \frac{F^{(n)}(M)}{(k+1)..n} \subset (F^{(k)}(M) * F^{(k)}(x_o)) -$$

$$- \Big(\sum_{i \in K_F^{n,k}} h^{i-k} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!}\Big)$$

ist, wobei $h = (x-x_o)$, $K_F^{n,k} = K_F^n \setminus K_F^k$ und $* \in \{-, \ominus\}$ ist, je nachdem, ob $k \in K_F^n$ oder $k \notin K_F^n$ ist.

(2) Falls $s < n$ ist, dann ist $T_{K_F^s}^{n,s}F$ genau dann kleinstes Element von $\langle \{T_{K_F^n}^{n,1}F,..,T_{K_F^n}^{n,n}F\}, \leq \rangle$, wenn

9 Verbesserungen der Taylor-Approximationen mittels Intervallzerlegung

9.1 Überblick

In § 7 wurde die Klasse $\tilde{C}^n$ mittels gewisser Informationen über das lokale Verhalten von $(\lambda F)^{(k)}$ in x_o, $F \in \tilde{C}^n$ und $k = 1,..,n-1$, in disjunkte Teilklassen $\tilde{D}^n_{K^n}$, wobei K^n die Potenzmenge von $\{1,..,n-1\}$ durchläuft, zerlegt. Für diese Klassen $\tilde{D}^n_{K^n}$ wurden sodann Approximationen $T^n_{K^n}$ konstruiert, die für $K^n \neq \emptyset$ die Einschließungsaussagen von T^n echt verbessern.

In § 9 sollen nach dem gleichen Prinzip weitere Approximationen für geeignete Teilklassen von $\tilde{C}^n$ konstruiert werden. Statt wie in § 7 das lokale Verhalten der $(\lambda F)^{(k)}$ auszunutzen, werden in § 9 gewisse Forderungen an das Wachstumsverhalten von $\lambda F: M \to \mathbb{R}$ gestellt (vgl. §9.2). Das führt zur Definition von Teilklassen $\tilde{C}^{n,k}$ von $\tilde{C}^n$. Für die (i.a. nicht disjunkten) Teilklassen $\tilde{C}^{n,k}$, $k = 1,..,n$, werden sodann Approximationen $R^{n,k}$ mittels Intervallzerlegung konstruiert. Diese $R^{n,k}$ verbessern die Einschließungsaussagen der $T^{n,k}$ für jedes $k = 1,..,n$.

Man kann diese Aussagen kombinieren mit denen aus § 7. Dies führt für die Teilmengen $\tilde{C}^n_{K^i} \cap \tilde{C}^{n,j}$, $j = 1,..,n$, auf Approximationen $R^{n,j}_{K^i}$. Diese $R^{n,j}_{K^i}$ verbessern sowohl die durch die $T^{n,j}_{K^i}$ als auch die durch die $R^{n,j}$ erhaltenen Einschließungsaussagen.

In § 9.2 werden zunächst die eingangs erwähnten Teilklassen $\tilde{C}^{n,k}$ von $\tilde{C}^n$, $k = 1,..,n$, definiert. Für gegebenes $F \in \tilde{C}^n$ besteht für $k < n$ ein gewisser Zusammenhang zwischen den Eigenschaften $F \in \tilde{C}^{n,k}$ und $k \in K^n_F$. Darauf wird anschließend eingegangen.

In § 9.3 werden für die Teilklassen $\tilde{C}^{n,k}$ von $\tilde{C}^n$, $k = 1,..,n$, Approximationen $R^{n,k}$ konstruiert. Im Anschluß werden dann für Teilmengen der Form $\tilde{C}^n_{K^i} \cap \tilde{C}^{n,j}$, $j = 1,..,n$, die eingangs erwähnten Approximationen $R^{n,j}_{K^i}$ konstruiert.

In § 9.4 werden die Approximationen aus § 9.3 auf Optimalität untersucht. Es wird gezeigt, daß $R^{n,k}$ bzw. $R^{n,j}_{K^i}$ für eine Teilmenge von $\tilde{C}^{n,k}$ bzw. von $\tilde{C}^n_{K^i} \cap \tilde{C}^{n,j}$ beste berechenbare Approximation ist (bzgl. gewisser Wertzuweisungen).

In § 9.5 werden die Approximationen aus § 9.3 verglichen bzgl. der von der Inklusion induzierten Ordnung $\subset$. Es wird gezeigt, daß die $R^{n,k}$ bzw. $R^{n,j}_{K^i}$ bessere Einschließungen liefern als die $T^{n,k}$ bzw. $T^{n,j}_{K^i}$.

Es ist unbefriedigend, daß die $R^{n,k}$ bzw. $R^{n,j}_{K^i}$ nur für eine Teilmenge ihres jeweiligen Definitionsbereichs beste Approximationen sind. In § 9.6 werden

für $k > 1$ Approximationen $R^{n,j,k}$ für $\tilde{C}^{n,k}$ mittels Intervallzerlegung konstruiert, die für $j < k$ auch beste berechenbare Approximationen für $\tilde{C}^{n,k}$ sind. Anschließend wird untersucht, ob man durch die $R^{n,j,k}$, $j \in \{1,..,n\}$, die Einschließungsgüte von $R^{n,k}$ verbessern kann. Für $j < k$ ist dies nicht möglich, für $j > k$ hingegen schon.

Der Definitionsbereich M der in § 9 zugrunde liegenden Klassen von I-Funktionen sei stets ein kompaktes Intervall. Weiter sei x_o ein beliebiger, fester Punkt aus M.

9.2 Konstruktion der Klassen $\tilde{C}^{n,k}$ und einige ihrer Eigenschaften

Es sei vorgelegt die Klasse von I-Funktionen $\tilde{C}^n(M, \mathbb{I})$. Für (i.a. nicht disjunkte) Teilklassen $\tilde{C}^{n,k}$ von $\tilde{C}^n$ sollen zunächst weitere Verbesserungen der gewöhnlichen Taylor-Approximationen $T^{n,k}$, $k \in \{1,..,n\}$, konstruiert werden. In 9.2 sollen diese Klassen definiert und einige ihrer Eigenschaften abgeleitet werden. (Wegen der folgenden Bezeichnungen vgl. § 7.2.)
Falls $x_o \in \{a,b\}$ ist, so existieren für jedes $F \in \tilde{C}^n$ die Ableitungen $(\lambda F)^{(k)}(x_o)$ für $k \in \{1,..,n-1\}$. Falls $x_o \in \mathring{M}$ ist, so existieren für jedes $F \in \tilde{C}^n$ und für alle $k \in \{1,..,n-1\}$ die Ableitungen $(\lambda F_c)^{(k)}(x_o)$, wobei $c \in \{a,b\}$ ist,und es gilt $\lambda F^{(k)}(x_o) = |(\lambda F_c)^{(k)}(x_o)|$.

Für $k \in \{1,..,n\}$ sei nun $\tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I})$ (kurz $\tilde{C}^{n,k}$) wie folgt definiert:

$$\tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I}) = \{F \in \tilde{C}^n \;/\; F \text{ erfüllt } \#\} ,$$

wobei die Bedingung # definiert ist durch

(1) Falls $x_o \in \{a,b\}$ ist, dann gilt für alle $x \in M$

$$\lambda F(x) \leq \lambda F(x_o) + (x-x_o)(\lambda F)'(x_o) + .. + (x-x_o)^{k-1} \frac{(\lambda F)^{(k-1)}(x_o)}{(k-1)!} .$$

(2) Falls $x_o \in \mathring{M}$ ist, dann gilt für alle $x \in M_c$

$$\lambda F_c(x) \leq \lambda F_c(x_o) + (x-x_o)(\lambda F_c)'(x_o) + .. + (x-x_o)^{k-1} \frac{(\lambda F_c)^{(k-1)}(x_o)}{(k-1)!} ,$$

wobei $c \in \{a,b\}$ ist.

Bemerkung 9.2.1

(a) Man kann die Bedingung # wie folgt interpretieren:
Die I-Funktion $F \in \tilde{C}^n$ gehört genau dann zu $\tilde{C}^{n,k}$, wenn das zugehörige (reelle) Breite-Funktional $(\lambda\Gamma)$ höchstens polynomial wie das Polynom (k-1)-ten Grades wächst, dessen Koeffizienten gerade die reellen Werte $(\lambda F_c)^{(j)}(x_o)/j!$, $j \in \{o,..,k-1\}$, sind.

(b) Für n = k = 1 fällt obige Definition zusammen mit der schon aus § 4 her bekannten Teilklasse $\tilde{C}^{1,1}$ von $\tilde{C}^1$, die wie folgt definiert ist (vgl. § 4.2): $\tilde{C}^{1,1}(M,\mathbb{I}) = \{F \in \tilde{C}^1 \;/\; \lambda F(x) \leq \lambda F(x_o) \text{ für alle } x \in M\}$.

Die Zerlegung von $\tilde{C}^n$ in die Teilklassen $\tilde{C}^{n,k}$ bietet allerdings nicht mehr die Vorteile, die man durch die Zerlegung von $\tilde{C}^n$ in die Teilklassen $\tilde{D}^n_{k^n}$ hat. Denn während die $\tilde{D}^n_{k^n}$ paarweise disjunkt sind, trifft dies für die $\tilde{C}^{n,k}$ nicht

mehr zu. Es gelten auch keine Inklusionen der Form $\tilde{C}^{n,k} \subset \tilde{C}^{n,j}$, oder umgekehrt, für $k,j \in \{1,..,n\}$ mit $k \neq j$.

Beispiel 9.2.2

Sei $M = [1,2]$, $x_o = 1$, $F: M \to \mathbb{R}$ mit $x \to [-1,1]\, 1/x$ und $n \geq 2$ fest. Es ist $F \in \tilde{C}^n$, und für $k \in \{1,..,n\}$ und k ungerade gilt $F \in \tilde{C}^{n,k}$. Für gerade $k \in \{1,..,n\}$ ist $F \notin \tilde{C}^{n,k}$.

Sei weiter $G: M \to \mathbb{R}$ mit $x \to [-1,1]\, \ln x$. Es ist $F \in \tilde{C}^n$, und für gerade $k \in \{1,..,n\}$ ist $F \in \tilde{C}^{n,k}$, für ungerade k dagegen gilt $F \notin \tilde{C}^{n,k}$.

Also sind die Klassen $\tilde{C}^{n,k}$ nicht paarweise disjunkt, und es gilt für $k,j \in \{1,..,n\}$ mit $k \neq j$ weder eine Inklusion der Form $\tilde{C}^{n,k} \subset \tilde{C}^{n,j}$ noch umgekehrt.

Die folgenden Teilmengen von $\tilde{C}^{n,k}$, $k \in \{1,..,n\}$, werden später noch häufig benötigt

Hilfssatz 9.2.3

Sei $k \in \{1,..,n\}$ und $j \in \{k,..,n\}$. Dann gilt für alle $K \subset \{1,..,j\}$ mit $\{k,..,j\} \subset K$ die Inklusion $\mathbb{P}^j_{x_o K}(M, \mathbb{R}) \subset \tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{R})$. Insbesondere ist also $\mathbb{P}^j_{x_o \{k\}}(M, \mathbb{R}) \subset \tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{R})$.

Beweis. Sei $F \in \mathbb{P}^j_{x_o K}$, und sei etwa $x_o = b$. Dann ist F also von der Form $F(x) = (\sum_{\substack{i=0 \\ i \notin K}}^{n} (x-x_o)^i A_i) + (\sum_{i \in K} (x-x_o)^i A_i)$. Wegen der Differenzierbarkeitseigenschaften von F erhält man daraus

$$F(x) = \Big(\sum_{\substack{i=0 \\ i \notin K}}^{n} (x-x_o)^i \frac{F^{(i)}(x_o)}{i!}\Big) + \Big(\sum_{i \in K} (x-x_o)^i \frac{F^{(i)}(x_o)}{i!}\Big) \text{ für alle } x \in M.$$

Aus dieser Gleichheit erhält man mit $h = (x-x_o)$

$$\lambda F(x) = \Big(\sum_{\substack{i=0 \\ i \notin K}}^{n} |h|^i \lambda F^{(i)}(x_o)/i!\Big) - \Big(\sum_{i \in K} |h|^i \lambda F^{(i)}(x_o)/i!\Big) \quad \text{für } x \in M.$$

Für $i \in \{1,..,j\} \setminus K$ gilt wegen $x_o = b$ nach Schema S aus § 7:
Entweder ist i gerade und $(\lambda F)^{(i)}(x_o) = \lambda F^{(i)}(x_o)$, oder i ist ungerade und $(\lambda F)^{(i)}(x_o) = -\lambda F^{(i)}(x_o)$. Wegen $h < o$ ist also in jedem Fall $|h|^i \lambda F^{(i)}(x_o) = h^i (\lambda F)^{(i)}(x_o)$.

Für $i \in K$ gilt dagegen:
Entweder ist i gerade und $(\lambda F)^{(i)}(x_o) = -\lambda F^{(i)}(x_o)$, oder i ist ungerade und $(\lambda F)^{(i)}(x_o) = \lambda F^{(i)}(x_o)$. Jetzt gilt in jedem Falle $-|h|^i \lambda F^{(i)}(x_o) = h^i (\lambda F)^{(i)}(x_o)$.

Wegen $\sum_{i=k}^{j} h^i (\lambda F)^{(i)}(x_o) \leq o$ erhält man dann $\lambda F(x) \leq \sum_{i=0}^{k-1} h^i \frac{(\lambda F)^{(i)}(x_o)}{i!}$

für alle $x \in M$, d.h. es ist $F \in \tilde{C}^{n,k}$.

Für gegebenes $F \in \tilde{C}^n$ ist es nicht immer ohne weiteres möglich festzustellen, für welche $k \in \{1,..,n\}$ $F \in \tilde{C}^{n,k}$ ist. Es gilt das folgende hinreichende Kriterium

Hilfssatz 9.2.4

Sei $F \in \tilde{C}^n(M, \mathbb{I})$, und für $k \in \{1,..,n\}$ gelte

(1) $x_o = a$ und $g^{(k)}(x) \leq f^{(k)}(x)$ für alle $x \in \mathring{M}$, oder

(2) $x_o = b$ und $g^{(k)}(x) \leq f^{(k)}(x)$ bzw. $f^{(k)}(x) \leq g^{(k)}(x)$ für alle $x \in \mathring{M}$, je nachdem, ob k gerade oder ungerade ist, oder

(3) $x_o \in \mathring{M}$ und $g^{(k)}(x) \leq f^{(k)}(x)$ für alle $x \in \mathring{M} \setminus \{x_o\}$, falls k gerade ist, bzw. $f^{(k)}(x) \leq g^{(k)}(x)$ für alle $x \in \mathring{M}_a$ und $g^{(k)}(x) \leq f^{(k)}(x)$ für alle $x \in \mathring{M}_b$, falls k ungerade ist.

Dann ist $F \in \tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I})$. Vertauscht man in (1) bis (3) jeweils $\leq$ durch $>$, so folgt $F \notin \tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I})$.

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus der k-fachen Differenzierbarkeit der reellen Abbildungen λF bzw. λF_c, $c \in \{a,b\}$.

Bemerkung 9.2.5

Für $F \in \tilde{C}^n$ ist sowohl $F \in \tilde{C}^{n,k}$ für alle $k \in \{1,..,n\}$ als auch $F \notin \tilde{C}^{n,k}$ für alle $k \in \{1,..,n\}$ möglich, wie die folgenden Beispiele zeigen:
Sei $M = [1,2]$, $x_o = 1$ und $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \to [x^2, 4+1/x]$. Weiter sei $n = 3$.
Dann ist $F \in \tilde{C}^{3,k}$ für $k = 1,2,3$ nach 9.2.4.
Sei $M = [1,2]$, $x_o = 2$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \to [-1,1]\,1/x$ und $n = 3$.
Mit 9.2.4 erhält man jetzt $F \notin C^{3,k}$ für $k = 1,2,3$.

In 9.5 werden die Einschließungsaussagen von 9.3 mit den Ergebnissen aus § 7 kombiniert, d.h. es werden Approximationen für Mengen von I-Funktionen der Form $\tilde{C}^{n,k} \cap C^n_K$ konstruiert. Es sollen daher im folgenden einige Beziehungen zwischen Mengen dieser Form hergeleitet werden.
Es soll zunächst anhand von Beispielen gezeigt werden, daß die folgenden vier Fälle eintreten können für $F \in \tilde{C}^n$:

(a) $K^n_F \neq \emptyset$ und $F \notin C^{n,k}$ für alle $k \in \{1,..,n\}$

(b) $K^n_F \neq \emptyset$ und $F \in C^{n,k}$ für mindestens ein $k \in \{1,..,n\}$

(c) $K^n_F = \emptyset$ und $F \notin C^{n,k}$ für alle $k \in \{1,..,n\}$

(d) $K^n_F = \emptyset$ und $F \in C^{n,k}$ für mindestens ein $k \in \{1,..,n\}$.

Beispiel 9.2.6

(a) Sei $M = [-1,0]$, $x_o = -1$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \to [x^3/3, e^x]$ und $n = 2$.

Wegen $\lambda F(x_o) < \lambda F(o)$ ist $F \notin \tilde{C}^{2,1}$. Es ist $f''(x) < g''(x)$ für alle x aus $M \setminus \{x_o\}$ und daher wegen 9.2.4 $F \notin \tilde{C}^{2,2}$.
Andererseits ist $(\lambda F)'(x_o) < o$ und daher wegen $x_o = a$ auch $1 \in K_F^2$.

(b) Sei $M = [1,2]$, $x_o = 1$, $F: M \to \mathbb{R}$ mit $x \longmapsto [-1, 1/x]$ und $n \geq 2$ fest.
Nach 9.2.4 ist dann $F \in \tilde{C}^{n,j}$ für alle ungeraden $j \in \{1,..,n\}$.
Weiter ist auch $K_F^n \neq \emptyset$.

(c) Seien M und F wie in (b), weiter sei $x_o = 2$ und $n \geq 2$ fest.
Dann ist $K_F^n = \emptyset$ und $F \notin \tilde{C}^{n,j}$ für alle $j \in \{1,..,n\}$, wie man sofort aus Schema Ⓢ bzw. aus 9.2.4 abliest.

(d) Sei $M = [o,1]$, $x_o = o$, $F: M \to \mathbb{R}$ mit $x \longmapsto [x^2, x^2+1]$ und $n = 2$.
Wegen $\lambda F(x) = \lambda F(x_o)$ für alle $x \in M$ ist $F \in \tilde{C}^{2,1}$.
Es ist $(\lambda F)' = o$ und daher $1 \notin K_F^2$.

Hilfssatz 9.2.7
Sei $F \in \tilde{C}^n(M, \mathbb{R})$, und für ein $k \in \{1,..,n-1\}$ gelte $F \in \tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{R})$. Dann folgt:
Entweder gilt $k \in K_F^n$, oder es ist $\lambda F^{(k)}(x_o) = o$.

Beweis. Sei $F \in \tilde{C}^{n,k}$. Weiter sei $x_o \in \mathring{M}$ und k gerade.
Angenommen, $\lambda F^{(k)}(x_o) > o$ und $k \notin K_F^n$. Dann muß nach Schema Ⓢ (vergl. § 7.2) $(\lambda F_c)^{(k)}(x_o) > o$ sein für $c = a$ oder $c = b$. Es trete etwa der erste Fall ein.
Wegen der Stetigkeit von $(\lambda F_a)^{(k)}$ existiert dann eine Umgebung $U_\delta(x_o)$ von x_o, so daß für alle $x \in U_\delta(x_o) \cap M_a$ $(\lambda F_a)^{(k)}(x) > o$ ist.
Sei nun $x \in U_\delta(x_o) \cap M_a$. Dann existiert nach dem Satz von Taylor ein $\xi \in (x, x_o)$ mit $\lambda F_a(x) = \lambda F_a(x_o) + (x-x_o)(\lambda F_a)'(x_o) + .. + (x-x_o)^k (\lambda F_a)^{(k)}(\xi)/k!$.
Wegen $\xi \in U_\delta(x_o) \cap M_a$ ist aber $(\lambda F_a)^{(k)}(\xi) > o$. Wegen $(x-x_o) < o$ und k gerade folgt daher $\lambda F_a(x) > \lambda F_a(x_o) + (x-x_o)(\lambda F_a)'(x_o) + .. + (x-x_o)^{k-1} (\lambda F_a)^{(k-1)}(x_o)/(k-1)!$.
Das ist aber ein Widerspruch zu $F \in \tilde{C}^{n,k}$.

Bemerkung 9.2.8
Aussage 9.2.7 ist nicht umkehrbar, d.h. für $F \in \tilde{C}^n$ mit $\lambda F^{(k)}(x_o) > o$ ist die Eigenschaft $F \in \tilde{C}^{n,k}$ stärker als die Eigenschaft $k \in K_F^n$.
Betrachte Beispiel 9.2.6,(a). Dort ist $(\lambda F)'(x_o) = 1/e - 1 < o$. Also ist $1 \in K_F^2$. Andererseits ist wegen $\lambda F(-1) < \lambda F(o)$ F kein Element von $\tilde{C}^{2,1}$.

Unter zusätzlichen Voraussetzungen kann man aus $k \in K_F^n$ auch $F \in \tilde{C}^{n,k}$ folgern.
Es gilt
Hilfssatz 9.2.9
Sei $F \in \tilde{C}^n(M, \mathbb{R})$ und $k \in K_F^n$. Weiter sei $\min_M \lambda F^{(k)}(x) > o$. Dann ist auch $F \in \tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{R})$.

Beweis. Sei $k \in K_F^n$ und etwa $x_o = b$, k ungerade. Dann muß also $(\lambda F)^{(k)}(x_o) > o$ sein. Wegen $\min_M \lambda F^{(k)}(x) > o$ wechselt $(\lambda F)^{(k)}$ sein Vorzeichen nicht in M. Also gilt in ganz M $(\lambda F)^{(k)} > o$. Damit folgt dann die Behauptung aus 9.2.4.

Aus 9.2.7 erhält man unmittelbar

Hilfssatz 9.2.10

(1) Sei $F \in \tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I})$ für $k < n$, und sei $\lambda F^{(k)}(x_o) > o$. Dann ist $k \in K_F^n$ und daher insbesondere $K_F^n \neq \emptyset$.

(2) Seien $k,j \in \{1,..,n\}$ mit $k < j$. Dann gilt für alle $K^j \subset \{1,..,j-1\}$ mit $k \notin K^j$

$$\tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I}) \cap \tilde{C}_{K^j}^n(M, \mathbb{I}) \subset C^{n,k+1}(M, \mathbb{I}) ,$$

d.h. falls $F \in \tilde{C}^{n,k}$ ist für $k < n$ und $k \notin K_F^n$ gilt, dann ist $F \in \tilde{C}^{n,k+1}$.

(3) Falls $F \in \tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I})$ ist für $k < n$, dann folgt $k \in K_F^n$ oder $F \in \tilde{C}^{n,k+1}(M, \mathbb{I})$.

(4) Für jedes $k \in \{1,..,n-1\}$ gilt die Inklusion

$$\tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I}) \cap (\tilde{C}^n(M, \mathbb{I}) \setminus \tilde{C}^{n,k+1}(M, \mathbb{I})) \subset \tilde{C}_{\{k\}}^n(M, \mathbb{I}) ,$$

d.h. falls $F \in \tilde{C}^{n,k}$ und $F \notin \tilde{C}^{n,k+1}$, dann ist $k \in K_F^n$.

Hilfssatz 9.2.11

Sei $F \in \tilde{C}^{n,k+1}$, und es gelte $k \in K_F^n$ oder $(\lambda F)^{(k)}(x_o) = o$, dann folgt $F \in \tilde{C}^{n,k}$. Insbesondere gilt also für alle $k,j \in \{1,..,n\}$ mit $k < j$ und $k \in K^j$ für $K^j \subset \{1,..,j-1\}$ die Inklusion

$$\tilde{C}^{n,k+1}(M, \mathbb{I}) \cap \tilde{C}_{K^j}^n(M, \mathbb{I}) \subset \tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I}) .$$

Beweis. Sei etwa $x_o = b$ und k gerade. Wegen $F \in \tilde{C}^{n,k+1}$ gilt für alle $x \in M$ $\lambda F(x) \leq \lambda F(x_o) + (x-x_o)(\lambda F)'(x_o) + .. + (x-x_o)^k (\lambda F)^{(k)}(x_o)/k!$. Es ist $k \in K_F^n$ oder $(\lambda F)^{(k)}(x_o) = o$, wegen $x_o = b$ also $(\lambda F)^{(k)}(x_o) \leq o$. Daher folgt mit obiger Ungleichung erst recht für alle $x \in M$ $\lambda F(x) \leq \lambda F(x_o) + (x-x_o)(\lambda F)'(x_o) + .. + (x-x_o)^{k-1} (\lambda F)^{(k-1)}(x_o)/(k-1)!$, d.h. es ist $F \in \tilde{C}^{n,k}$. Der andere Fall geht analog.

Aus 9.2.11 erhält man unmittelbar

Hilfssatz 9.2.12

(1) Für alle $F \in \tilde{C}^{n,k+1}(M, \mathbb{I}) \cap (\tilde{C}^n(M, \mathbb{I}) \setminus \tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I}))$ folgt $k \notin K_F^n$ und $\lambda F^{(k)}(x_o) \neq o$.

(2) Für alle $k,j \in \{1,..,n\}$ mit $k < j$ und $k \in K^j$, $K^j \subset \{1,..,j-1\}$, gilt

$$(\tilde{C}^n(M, \mathbb{I}) \setminus \tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I})) \cap \tilde{C}^n_{K^j}(M, \mathbb{I}) \subset (\tilde{C}^n(M, \mathbb{I}) \setminus \tilde{C}^{n,k+1}(M, \mathbb{I})),$$

d.h. für alle $F \in \tilde{C}^n$ mit $F \notin \tilde{C}^{n,k}$ und $k \in K^n_F$ folgt $F \notin \tilde{C}^{n,k+1}$.

Bemerkung 9.2.13

Für jedes $k \in \{1,..,n\}$ ist $\tilde{C}^{n,k}$ ein Unterraum des quasilinearen Raums $\tilde{C}^n$, versehen mit der punktweise definierten Addition und skalaren Multiplikation.

Der Beweis folgt sofort aus der Gültigkeit von $(\lambda(\alpha F))^{(j)} = |\alpha|(\lambda F)^{(j)}$ und $(\lambda(F+G))^{(j)} = (\lambda F)^{(j)} + (\lambda G)^{(j)}$ für $F,G \in \tilde{C}^{n,k}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und für alle $j = 1,..,k-1$.

Für $F \in \tilde{C}^n$ sei M^n_F jene Teilmenge von $\{1,..,n\}$, für deren Elemente j $F \in \tilde{C}^{n,j}$ ist, d.h.

$$M^n_F = \{j \mid j \in \{1,..,n\} \text{ und } F \in \tilde{C}^{n,j}\}.$$

9.3 Taylor-Approximationen und Intervallzerlegung

Sei vorgegeben die Menge der I-Funktionen $\tilde{C}^n(M, \mathbb{I})$. Dann kann man $\tilde{C}^n$ disjunkt zerlegen in $\tilde{C}_1^n$ und $\tilde{C}_2^n$, die definiert sind durch

$\tilde{C}_1^n = \{F \in \tilde{C}^n$ / es gibt ein $k \in \{1,..,n\}$ mit $F \in \tilde{C}^{n,k}\}$ und $\tilde{C}_2^n = \tilde{C}^n \setminus \tilde{C}_1^n$.

Wir hatten schon festgestellt, daß beide Mengen nicht leer sind. $\tilde{C}_1^n$ ist darstellbar als Vereinigung der $\tilde{C}^{n,k}$, $k \in \{1,..,n\}$. Allerdings ist diese Vereinigung nicht mehr disjunkt.
Für die Menge $\tilde{C}_1^n$ kann man mit Hilfe des Prinzips der Intervallzerlegung Einschließungen konstruieren, die in jedem Falle besser sind als die entsprechenden Taylor-Approximationen der gleichen Ordnung. Allerdings kann man keine Approximation für die gesamte Klasse $\tilde{C}_1^n$ angeben, sondern lediglich jeweils für die (nicht disjunkten) Teilklassen $\tilde{C}^{n,k}$.
Für die Menge $\tilde{C}_2^n$ stehen weiterhin nur die gewöhnlichen Taylor-Einschließungen bzw, falls $K_F^n \neq \emptyset$ ist für ein $F \in \tilde{C}_2^n$, die Einschließungen aus § 7 zur Verfügung.

Zum Beweis der nächsten Aussage benötigt man die Differenzierbarkeitseigenschaften der (reellwertigen) Abbildungen φF und λF für $F \in \tilde{C}^n$.
Wir hatten schon in § 5 gezeigt, daß φF n-mal stetig differenzierbar ist für jedes $F \in C^n$. Das gilt also insbesondere für $F \in \tilde{C}^n$.
Da für $F \in \tilde{C}^n$ die zugehörigen Randfunktionen (n-1)-mal stetig differenzierbar sind in M bzw. in M_a und M_b und in den jeweiligen offenen Intervallen noch die n-te Ableitung existiert, so gilt das gleiche für λF.

Satz 9.3.1
Sei $F \in \tilde{C}_1^n(M, \mathbb{I})$. Dann gilt für alle $k \in \{1,..,n\}$ mit $F \in \tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I})$:
Der intervallarithmetische Ausdruck

$$(F(x_o)+..+h^{k-1}\frac{F^{(k-1)}(x_o)}{(k-1)!}+h^k\frac{\varphi_F^{(k)}(M)}{k!}) \dotplus h^k\frac{[-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)}{2\cdot k!}$$

(wobei $h = (x-x_o)$ ist für $x \in M$), der in Zukunft abkürzend mit $R^{n,k}F(x)$ bezeichnet wird, ist für alle $x \in M$ definiert,und es gilt

$$F(x) \subset R^{n,k}F(x) \quad \text{für alle } x \in M, \text{ d.h. es ist } F \in R^{n,k}F.$$

Beweis. Sei $F \in \tilde{C}^{n,k}$ für $k \in \{1,..,n\}$, und sei etwa k gerade. Weiter sei $x_o \in \mathring{M}$. Da $\varphi F \in C^n(M, \mathbb{R})$ ist, so ist $\varphi F^{(k)}(M) \in \mathbb{I}$. Da $F^{(k)}$ stetig ist, so auch $\lambda F^{(k)}$, und daher wird das $\min_M \lambda F^{(k)}(x)$ angenommen.
Sei $x \in M$, etwa $x < x_o$. Nach dem Satz von Taylor existieren dann $\xi, \eta \in (x, x_o)$, so daß gilt:

$$\lambda F(x) = (\lambda F_a)(x) = (\lambda F_a)(x_o)+h(\lambda F_a)'(x_o)+..+h^k \frac{(\lambda F_a)^{(k)}(\eta)}{k!} \quad \text{und}$$

$$\varphi F(x) = \varphi F(x_o) + h\varphi F'(x_o) +..+ h^k \frac{\varphi F^{(k)}(\xi)}{k!}.$$

Wegen $F \in \tilde{C}^{n,k}$ ist $h^k((\lambda F_a)^{(k)}(\eta))/k! \leq o$. Da k gerade ist, und wegen $\lambda F^{(k)}(\eta) = |(\lambda F_a)^{(k)}(\eta)|$, erhält man daraus $h^k(\lambda F_a)^{(k)}(\eta) = -h^k \lambda F^{(k)}(\eta)$. Durch Intervallzerlegung erhält man nun

$$F(x) = \varphi F(x) + [-1,1]\lambda F(x)/2 = \varphi F(x_o) + h\varphi F'(x_o) +..+ h^k \frac{\varphi F^{(k)}(\xi)}{k!}$$

$$..+ [-1,1]\,(\lambda F(x_o) + h(\lambda F_a)'(x_o) +..+ h^k \frac{(\lambda F_a)^{(k)}(\eta)}{k!})/2 .$$

$$= [2\cdot\varphi F(x_o)+..+2h^k \frac{\varphi F^{(k)}(\xi)}{k!} - \lambda F(x_o)-.. + h^k \frac{F^{(k)}(\eta)}{k!},$$

$$2\varphi F(x_o)+..+2h^k \frac{\varphi F^{(k)}(\xi)}{k!} + F(x_o)+.. - h^k \frac{\lambda F^{(k)}(\eta)}{k!}]/2 .$$

Nach Definition von $\dot{+}$ (vgl.1.2) erhält man wegen der Identität $F^{(j)}(x_o) = \varphi F^{(j)}(x_o) + [-1,1]\lambda F^{(j)}(x_o)/2$ für $j = o,..,k-1$ daraus

$$F(x) = (\sum_{i=o}^{k-1} h^i \frac{F^{(i)}(x_o)}{i!} + h^k \frac{\varphi F^{(k)}(\xi)}{k!}) \dot{+} h^k \frac{[-1,1]\lambda F^{(k)}(\eta)}{k!} .$$

Wegen der Isotonie der Intervalladdition und der Eigenschaft: $'A \dot{+} B \subset A \dot{+} C$ genau dann, wenn $C \subset B$ ist für Intervalle A,B,C mit $\lambda B,\ \lambda C \leq \lambda A'$, erhält man daraus schließlich

$$F(x) \subset (\sum_{i=o}^{k-1} h^i \frac{F^{(i)}(x_o)}{i!} + h^k \frac{\varphi F^{(k)}(M)}{k!}) \dot{+} h^k \frac{[-1,1]\ \min_M \lambda F^{(k)}(x)}{2\cdot k!} .$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

Bemerkung 9.3.2

Für $F \in \tilde{C}^{n,k}$ wird durch 9.3.1 das I-Polynom bzw. verallgemeinerte I-Polynom $R^{n,k}F$ definiert, je nachdem, ob $\min_M \lambda F^{(k)}(x) < \lambda(\varphi F^{(k)}(M))$ ist oder nicht. Also wird durch die Zuordnung $F \mapsto R^{n,k}F$ für $F \in \tilde{C}^{n,k}$ eine einschließende Approximation $R^{n,k}: \tilde{C}^{n,k} \to \tilde{C}^n$ für die Menge der I-Funktionen $\tilde{C}^{n,k}$ definiert.

Wir hatten in 9.2.3 gezeigt, daß für jedes $k \in \{1,..,n\}$ $\mathbb{P}^k_{x_o\{k\}} \subset \tilde{C}^{n,k}$ ist. Also gilt insbesondere für alle $F \in \mathbb{P}^k_{x_o\{k\}}$ $F \in R^{n,k}F$. Es gilt weiter

Hilfssatz 9.3.3

Für alle $F \in \mathbb{P}^k_{x_o\{k\}}(M, \mathbb{I})$ ist $F = R^{n,k}F$.

Beweis. Sei $F \in \mathbb{P}^{k}_{x_o\{k\}}$. Dann ist F von der Form

$$F(x) = (A_o+(x-x_o)A_1+..+(x-x_o)^{k-1}A_{k-1}) \dot{+} (x-x_o)^k A_k,\ x \in M,\ A_i \in \mathbb{I}.$$

Aus den Differenzierbarkeitseigenschaften von F (vergl. 5.3.6) erhält man $F^{(j)}(x_o) = j!A_j$ für $j = 1,..,k-1$. Für $x \in M$ ist weiter $\curlyvee F^{(k)}(x) = k!\,\curlyvee A_k$, und daher gilt $\curlyvee F^{(k)}(M) = k!\,\curlyvee A_k$. Weiter ist $\min_M \curlywedge F^{(k)}(x) = k!\,\curlywedge A_k$, und daher folgt wegen $\lambda(\curlyvee F^{(k)}(M)) = o$

$$A_k = ([-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dot{+} \curlyvee F^{(k)}(M))/k!.$$

Daraus erhält man schließlich

$$F(x) = (F(x_o)+(x-x_o)F'(x_o)+..+(x-x_o)^{k-1}\frac{F^{(k-1)}(x_o)}{(k-1)!}) \dot{+}$$

$$\dot{+}\ (x-x_o)^k \frac{([-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2) \dot{+} \curlyvee F^{(k)}(M)}{k!} = R^{n,k}F(x)$$

für alle $x \in M$. Also gilt die Behauptung.

In § 7 wurden für die Mengen von I-Funktionen $\tilde{C}^n_{K^j}$, wobei $j \leq n$ ist und K^j irgendeine Teilmenge von $\{1,..,j-1\}$, die (einschließenden) Approximationen $T^{n,j}_{K^j}$ konstruiert. Kombiniert man die Ergebnisse von § 7 mit der Aussage 9.3.1, so kann man einschließende Approximationen für die Klassen von I-Funktionen $\tilde{C}^n_{K^j} \cap \tilde{C}^{n,j}$ erhalten, welche für $j \geq 2$ sowohl die Ergebnisse von § 7 als auch von 9.3.1 verbessern. (Für $j = 1$ ist $K^j = \emptyset$, und man erhält die in § 4.2 konstruierte Approximation $R^{n,1} = R^1$ für $\tilde{C}^{n,1} \cap \tilde{C}^n_{K^1} = \tilde{C}^{n,1}$.)
Die nächste Aussage stellt zunächst sicher, daß jede dieser Mengen $\tilde{C}^n_{K^j} \cap \tilde{C}^{n,j}$ nicht leer ist und liefert weiter Teilklassen, die später noch für Optimalitätsaussagen benötigt werden.
Sei $j \in \{2,..,n\}$ und $K^j \subset \{1,..,j-1\}$. Weiter sei $\bar{K}^j = K^j \cup \{j\}$.
Mit $\tilde{\mathbb{P}}^j_{x_o\bar{K}^j}$ werde jene Teilmenge von $\mathbb{P}^j_{x_o\bar{K}^j}$ bezeichnet, deren Elemente F folgende Eigenschaft haben: Für die Koeffizienten A_k von F mit $k \in K^j$ gilt $\lambda A_k > o$ (vgl. § 7.2). Dann folgt

Hilfssatz 9.3.4

Mit obigen Bezeichnungen gilt die Inklusion $\tilde{\mathbb{P}}^j_{x_o\bar{K}^j} \subset \tilde{D}^n_{K^j} \cap \tilde{C}^{n,j}$.

Beweis. Sei $F \in \tilde{\mathbb{P}}^j_{x_o\bar{K}^j}$, $x_o = b$ und k gerade. Dann gilt für alle $x \in M$

$$F(x) = (\sum_{\substack{k=o \\ k \notin \bar{K}^j}}^{j} (x-x_o)^k \frac{F^{(k)}(x_o)}{k!}) \dot{+} (\sum_{k \in \bar{K}^j} (x-x_o)^k \frac{F^{(k)}(x_o)}{k!}).$$

Für $k \in \{1,..,j\} \setminus \bar{K}^j$ gilt $|x-x_o|^k \lambda F^{(k)}(x_o) = (x-x_o)^k (\lambda F)^{(k)}(x_o)$ und für $k \in \bar{K}^j$ $|x-x_o|^k \lambda F^{(k)}(x_o) = -(x-x_o)^k (\lambda F)^{(k)}(x_o)$. Also folgt

$\lambda F(x) = \sum_{k=0}^{j} (x-x_o)^k (\lambda F)^{(k)}(x_o)/k!$ für alle $x \in M$. Wegen der Gültigkeit von $(x-x_o)^k (\lambda F)^{(k)}(x_o) \leq o$ für alle $x \in M$ erhält man daraus $\lambda F(x) \leq F(x_o)+(x-x_o)(\lambda F)'(x_o)+..+(x-x_o)^{j-1}(\lambda F)^{(j-1)}(x_o)/(j-1)!$ für alle $x \in M$ und damit $F \in \tilde{C}^{n,j}$ nach Definition von $\tilde{C}^{n,j}$.
Nach Konstruktion gilt $K_F^j = K^j$ für alle $F \in \tilde{\mathbb{P}}_{x_o K^j}^j$, d.h. es ist auch $\tilde{\mathbb{P}}_{x_o K^j}^j \subset \tilde{D}_{K^j}^n$.
Also gilt die Behauptung.

Satz 9.3.5

Sei $j \in \{2,..,n\}$ und $K^j \subset \{1,..,j-1\}$. Dann ist für alle $x \in M$ und für alle $F \in \tilde{C}_{K^j}^n(M, \mathrm{II}) \cap \tilde{C}^{n,j}(M, \mathrm{II})$ der intervallarithmetische Ausdruck

$$(\alpha)\quad (..(\sum_{\substack{k=0 \\ k \notin K^j}}^{j-1} h^k \frac{F^{(k)}(x_o)}{k!} + h^j \frac{\varphi F^{(j)}(M)}{j!}) \dot{+} h^{n_1} \frac{F^{(n_1)}(x_o)}{n_1!}) \dot{+} ..$$
$$..\dot{+} h^{n_r} \frac{F^{(n_r)}(x_o)}{n_r!}) \dot{+} h^j \frac{[-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)}{2\,j!}$$

definiert (den wir in Zukunft kurz mit $R_{K^j}^{n,j}F(x)$ bezeichnen wollen), wobei $h = (x-x_o)$ ist und $n_i \in K^j = \{n_1,..,n_r\}$ für $i = 1,..,r$.

Weiter gilt für alle $x \in M$

$$F(x) \subset R_{K^j}^{n,j}F(x), \text{ d.h. es ist } F \in R_{K^j}^{n,j}F.$$

Beweis. Der Beweis von 9.3.5 verläuft ähnlich wie der von 9.3.1, wobei man zusätzlich für $k \in K^j$ $(x-x_o)^k (\lambda F)^{(k)}(x_o) < o$ (bzw. $> o$) zu beachten hat. Auf Einzelheiten soll daher verzichtet werden.

Bemerkung 9.3.6

Für $F \in \tilde{C}_{K^j}^n \cap \tilde{C}^{n,j}$ wird durch (α) in 9.3.5 ein verallgemeinertes I-Polynom aus $\tilde{\mathbb{P}}_{x_o K^j}^j$ bzw. aus $\tilde{\mathbb{P}}_{x_o \bar{K}^j}^j$ definiert, das in Zukunft mit $R_{K^j}^{n,j}F$ bezeichnet werde. Also wird durch die Zuordnung $F \longmapsto R_{K^j}^{n,j}F$ ein (einschließender) Approximationsoperator $R_{K^j}^{n,j} : \tilde{C}_{K^j}^n \cap \tilde{C}^{n,j} \longrightarrow \tilde{\mathbb{P}}_{x_o K^j}^j \cup \tilde{\mathbb{P}}_{x_o \bar{K}^j}^j$ $(\neq \tilde{C}^{n,j}!)$ definiert. Falls $K^j = \emptyset$ ist, dann fällt $\tilde{C}_{K^j}^n \cap \tilde{C}^{n,j}$ mit $\tilde{C}^{n,j}$ zusammen und $R_{K^j}^{n,j}$ mit der Einschließung $R^{n,j}$ aus 9.3.1.

In 9.3.4 wurde bereits festgestellt, daß $\tilde{\mathbb{P}}_{x_o \bar{K}^j}^j \subset \tilde{C}_{K^j}^n \cap \tilde{C}^{n,j}$ ist. Also ist $R_{K^j}^{n,j}$ eine Approximation für alle $F \in \tilde{\mathbb{P}}_{x_o \bar{K}^j}^j$. Es gilt weiter

Hilfssatz 9.3.7

Für alle $F \in \tilde{\mathbb{P}}_{x_o \bar{K}^j}^j$ gilt die Gleichheit $F = R_{K^j}^{n,j}F$.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu dem von HS 9.3.3.

Statt wie in 9.3.5 die Klassen $\tilde{C}^{n}_{K^j} \cap \tilde{C}^{n,j}$ zu betrachten, kann man auch allgemeiner die Klassen $\tilde{C}^{n}_{K^j} \cap \tilde{C}^{n,s}$ zugrunde legen, wobei $s \in \{j,..,n\}$ ist, und für I-Funktionen $F \in \tilde{C}^{n}_{K^j} \cap \tilde{C}^{n,s}$ in ganz analoger Weise zu 9.3.5 einschließende Approximationen $R^{n,s}_{K^j} F$ konstruieren. Es gilt:

Satz 9.3.8

Sei $j \in \{1,..,n\}$ und $s \in \{j,..,n\}$. Weiter sei $K^j = \{n_1,..,n_r\} \subset \{1,..,j-1\}$ beliebig. Dann folgt für alle $F \in \tilde{C}^{n}_{K^j}(M, \mathrm{II}) \cap \tilde{C}^{n,s}(M, \mathrm{II})$:

Für alle $x \in M$ ist der intervallarithmetische Ausdruck

$$(\beta)\,(..(\quad h^k \frac{F^{(k)}(x_o)}{k!} + h^s \frac{\varphi F^{(s)}(M)}{s!}) \dot{+} h^{n_1} \frac{F^{(n_1)}(x_o)}{n_1!}) \dot{+} ..$$

$$..\dot{+} h^{n_r} \frac{F^{(n_r)}(x_o)}{n_r!}) \dot{+} h^s \frac{[-1,1] \min_M \lambda F^{(s)}(x)}{2 \cdot s!} ,$$

wobei $h = (x - x_o)$ ist, definiert. (β) soll in Zukunft abkürzend mit $R^{n,s}_{K^j} F(x)$ bezeichnet werden. Weiter gilt für alle $x \in M$ die Inklusion

$$F(x) \subset R^{n,s}_{K^j} F(x) \quad , \text{ d.h. es ist } F \leq R^{n,s}_{K^j} F.$$

Für $j \in \{2,..,n\}$ und $s \in \{j,..,n\}$ sei $\bar{K}^j = K^j \cup \{s\}, K^j \subset \{1,..,j-1\}$. Weiter sei $\tilde{\mathbb{P}}^{s}_{*,\bar{K}^j}$ in Analogie zu $\tilde{\mathbb{P}}^{j}_{*,\bar{K}^j}$ definiert. Man zeigt dann ebenso wie vorher die Inklusion $\mathbb{P}^{s}_{*,\bar{K}^j} \subset \tilde{D}^{n}_{K^j} \cap \tilde{C}^{n,s}$ und die Gültigkeit von $F = R^{n,s}_{K^j} F$ für $F \in \mathbb{P}^{s}_{*,\bar{K}^j}$.

Bemerkung 9.3.9

Für $F \in \tilde{C}^{n}_{K^j} \cap \tilde{C}^{n,s}$ wird durch (β) aus 9.3.8 eine einschließende Approximation $R^{n,s}_{K^j} : \tilde{C}^{n}_{K^j} \cap \tilde{C}^{n,s} \to \tilde{\mathbb{P}}^{s}_{*,K^j} \cup \tilde{\mathbb{P}}^{s}_{*,\bar{K}^j}$ definiert. Falls K^j leer ist, so fällt 9.3.9 mit 9.3.1 zusammen.

Bemerkung 9.3.10

Für $s = j$ erhält man aus 9.3.8 Satz 9.3.5, d.h. 9.3.5 ist ein Spezialfall von 9.3.8. Trotzdem kommt 9.3.8 nur eine untergeordnete Bedeutung zu. Denn in § 9.5 wird gezeigt, daß man für gegebenes $F \in \tilde{C}^{n,s}$ mit $R^{n,s}_{K^j_F} F$ immer die bestmögliche Einschließung für F unter allen Approximationen der Form $R^{n,s}_{K^j} F$ mit $s \in \{j,..,n\}$ und $F \in \tilde{C}^{n}_{K^j} \cap \tilde{C}^{n,s}$ erhält, d.h. daß man mit Hilfe von 9.3.5 für $F \in C^{n,s}$ immer die bestmögliche Einschließung unter allen Approximationen dieser Form erhält.

Bemerkung 9.3.11

Ähnlich wie 9.3.5 kann man auch 9.3.1 verallgemeinern, d.h. man kann durch

das Prinzip der Intervallzerlegung neben $R^{n,k}$ weitere Approximationen für die Klassen $\tilde{C}^{n,k}$ konstruieren. Im Gegensatz zu 9.3.5 bzw. 9.3.8 kann man dadurch stellenweise auch Verbesserungen für die $R^{n,k}$ erzielen.
Da diese Untersuchungen etwas umfangreicher sind, soll darauf in einem neuen Abschnitt eingegangen werden, vergl. § 9.6.

Beispiel 9.3.12

Sei $M = [1,2]$, $x_o = 1$, $F:M \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto [x^3/3,3+(1/x)]$ und $n = 5$.
Dann ist $F \in \tilde{C}^5$. Mit Hilfe von 9.2.4 folgt weiter $M_F^5 = \{1,2,3,5\}$. Mittels des Schemas (S) aus § 7.2 erhält man $K_F^5 = \{1,3\}$.
Also gilt $F \in \tilde{D}^5_{K_F^j} \cap \tilde{C}^{5,j}$ für $j = 1,2,3,5$.
Damit stehen als Approximation für F die Einschließungen $T^{5,k}_{K_F^k}F$, $k = 1,..,5$, und $R^{5,j}_{K_F^j}F$, $j = 1,2,3,5$, zur Verfügung.
Durch Nachrechnen bzw. mit Methoden, die in § 10 entwickelt werden, kann man zeigen, daß unter diesen Einschließungen für F $T^{5,4}_{K_F^4}F$ die günstigste ist, d.h. daß $T^{5,4}_{K_F^4}F$ minimales Element von $\langle \{T^{5,k}_{K_F^k}F / k \in \{1,..,5\}\} \cup \{R^{5,j}_{K_F^j}F / j \in M_F^5\}, \leq \rangle$ ist.

9.4 Optimalität der Approximationen $R^{n,j}$ und $R_K^{n,j}$

In § 9.4 sollen die Approximationen aus § 9.3 auf Optimalität untersucht werden.

Sei $j \in \{1,..,n\}$ ein fester Index.

Durch 9.3.1 wird ein Approximationsoperator $R^{n,j}:\tilde{C}^{n,j} \to \tilde{C}^n$ definiert.

Für $F \in \tilde{C}^{n,j}$ und für alle $x \in M$ gilt

$$R^{n,j}F(x) = (F(x_o)+..+(x-x_o)^{j-1}\frac{F^{(j-1)}(x_o)}{(j-1)!}+(x-x_o)^j\frac{\varphi F^{(j)}(M)}{j!}) \dot{+} (x-x_o)^j\frac{[-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2}{j!}.$$

Nun gilt für $A,B,C \in \mathbb{I}$ mit $\lambda(A+B) \geq \lambda C$: Es ist $(A+B)\dot{+}C = A \dot{+} (C \dot{+} B)$, falls $\lambda B \leq \lambda C$, bzw. $(A+B)\dot{+}C = A+(B\dot{+}C)$ sonst.

Also gilt: Für gegebenes $F \in \tilde{C}^{n,j}$ ist $R^{n,j}F \in \tilde{C}^{n,j}$ genau dann, wenn $\lambda(\varphi F^{(j)}(M)) \leq \min_M \lambda F^{(j)}(x)$ ist.

Sei $\tilde{G}^{n,j}(M,\mathbb{I}) = \{F \in \tilde{C}^{n,j} \mid \min_M \lambda F^{(j)}(x) \geq \lambda(\varphi F^{(j)}(M))\}$ und $R^{n,j} \mid \tilde{G}^{n,j} = \tilde{R}^{n,j}$. Dann gilt also für $F \in \tilde{G}^{n,j}$ und für alle $x \in M$

$$\tilde{R}^{n,j}F(x) = (F(x_o)+..+(x-x_o)^{j-1}\frac{F^{(j-1)}(x_o)}{(j-1)!}) \dot{+} (x-x_o)^j(\frac{[-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j)}(M)}{j!}).$$

Die Approximation $\tilde{R}^{n,j}$ für $\tilde{G}^{n,j}$ ist berechenbar bzgl. der Wertzuweisungen $W_o^j, W_1^j, \ldots, W_j^j : \tilde{G}^{n,j} \to \mathbb{I}$, wobei $W_i^j(F) = F^{(i)}(x_o)$ ist für $i = o,..,j-1$ und $W_j^j(F) = [-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j)}(M)$. Weiter gilt:

Satz 9.4.1

$\tilde{R}^{n,j}$ ist beste Approximation für $\tilde{G}^{n,j}$ bzgl. $\mathcal{O}(\tilde{G}^{n,j}, W_o^j, .., W_j^j)$.

Beweis. Es ist $\tilde{R}^{n,j}:\tilde{G}^{n,j} \to \mathbb{P}^j_{x_o\{j\}} \subset \tilde{G}^{n,j}$. Wegen 2.4.5 genügt es daher zu zeigen, daß $W_i^j(F) = W_i^j(\tilde{R}^{n,j}F)$ ist für alle $F \in \tilde{G}^{n,j}$ und für $i = o,..,j$. Wegen $(\tilde{R}^{n,j}F)^{(i)}(x_o) = F^{(i)}(x_o)$ für $o \leq i \leq j-1$ ist dies klar für diese i. Für alle $x \in M$ ist $(\tilde{R}^{n,j}F)^{(j)}(x) = [-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j)}(M)$. Daraus folgt $\min_M \lambda (\tilde{R}^{n,j}F)^{(j)}(x) = \min_M \lambda F^{(j)}(x) - \lambda(\varphi F^{(j)}(M))$ und $\varphi(\tilde{R}^{n,j}F)^{(j)}(M) = \varphi(\varphi F^{(j)}(M))$ $(\in \mathbb{R}!)$. Unter Beachtung von $A = \varphi A + [-1,1]\lambda A/2$ für $A \in \mathbb{I}$ erhält man daraus $W_j^j(F) = W_j^j(\tilde{R}^{n,j}F)$. Also folgt die Behauptung nach 2.4.5.

Es wurde bereits festgestellt, daß $\mathbb{P}^j_{x_o\{j\}} \subset \tilde{G}^{n,j}$ ist. Mit 9.3.3 folgt dann weiter

Hilfssatz 9.4.2

Es ist $\tilde{R}^{n,j}(\tilde{G}^{n,j}) = \mathbb{P}^{j}_{\lambda_o\{j\}}$, und damit gilt für $F \in \tilde{C}^{n,j}$ $F = R^{n,j}F$ genau dann, wenn $F \in \mathbb{P}^{j}_{\lambda_o\{j\}}$ ist.

Durch 9.3.5 wird eine Approximation $R^{n,j}_{K^j}: \tilde{C}^{n}_{K^j} \cap \tilde{C}^{n,j} \to \tilde{C}^{n}_{K^j}$ definiert. Ähnlich wie für $R^{n,j}$ zeigt man: Für $F \in \tilde{C}^{n}_{K^j} \cap \tilde{C}^{n,j}$ ist $R^{n,j}_{K^j}F$ genau dann aus $\tilde{C}^{n}_{K^j} \cap \tilde{C}^{n,j}$, wenn $\min_H \lambda F^{(j)}(x) \geq \lambda(\nabla F^{(j)}(M))$ ist.

Sei $R^{n,j}_{K^j} \upharpoonright \tilde{C}^{n}_{K^j} \cap \tilde{G}^{n,j} = \tilde{R}^{n,j}_{K^j}$. Dann ist $\tilde{R}^{n,j}_{K^j}$ berechenbar bzgl. der Wertzuweisungen $W^{j}_{o},..,W^{j}_{j}$. Weiter gilt:

Satz 9.4.3

$\tilde{R}^{n,j}_{K^j}$ ist beste Approximation für $\tilde{C}^{n}_{K^j} \cap \tilde{G}^{n,j}$ bzgl. $\mathcal{OL}(\tilde{C}^{n}_{K^j} \cap \tilde{G}^{n,j}, W^{j}_{o},..,W^{j}_{j})$.

Beweis. Es ist $\tilde{R}^{n,j}_{K^j}: \tilde{C}^{n}_{K^j} \cap \tilde{G}^{n,j} \to \tilde{\mathbb{P}}^{j}_{\lambda_o K^j} \subset \tilde{C}^{n}_{K^j} \cap \tilde{G}^{n,j}$. Der Beweis zu 9.4.3 folgt nun genauso wie der zu 9.4.1.

Wegen $\tilde{\mathbb{P}}^{j}_{\lambda_o \bar{K}^j} \subset \tilde{D}^{n}_{K^j} \cap \tilde{G}^{n,j}$ gilt die

Folgerung 9.4.4

Die Einschränkung von $\tilde{R}^{n,j}_{K^j}$ auf $\tilde{D}^{n}_{K^j} \cap \tilde{G}^{n,j}$ ist beste Approximation für $\tilde{D}^{n}_{K^j} \cap \tilde{G}^{n,j}$ bzgl. $\mathcal{OL}(\tilde{D}^{n}_{K^j} \cap G^{n,j}, W^{j}_{o},..,W^{j}_{j})$.

Hilfssatz 9.4.5

Für $F \in \tilde{C}^{n}_{K^j} \cap \tilde{C}^{n,j}$ gilt genau dann $F = R^{n,j}_{K^j}F$, wenn $F \in \tilde{\mathbb{P}}^{j}_{\lambda_o K^j}$ ist.

Bemerkung 9.4.6

Es gelten analoge Optimalitätsaussagen auch für die Approximationen $R^{n,s}_{K^j}$ von $\tilde{C}^{n}_{K^j} \cap \tilde{C}^{n,s}$, wobei $j \in \{1,..,n\}$ ist und $s \in \{j,..,n\}$ (vgl. 9.3.8).

Sei $\tilde{C}^{n,\emptyset} = \{F \in \tilde{C}^{n} \mid M^{n}_{F} = \emptyset\}$. Dann stehen für die I-Funktionen $F \in \tilde{C}^{n,\emptyset}$ weiterhin nur die Einschließungen $T^{n,k}F$, bzw. für $K^{n}_{F} \neq \emptyset$ die $T^{n,k}_{K^k}F$, $k = 1,..,n$, zur Verfügung. Für $F \in \tilde{C}^{n,\emptyset} \cap \tilde{D}^{n}_{\emptyset}$ stehen weiterhin nur die gewöhnlichen Taylor-Einschließungen zur Verfügung.
Die $T^{n,k}$ bzw. $T^{n,k}_{K^k}$ sind berechenbar bzgl. der Werte $V^{k}_{o},..,V^{k}_{k}$, wobei $V^{k}_{i}(F) = F^{(i)}(x_o)$ ist für $o \leq i \leq k-1$ und $V^{k}_{k}(F) = F^{(k)}(M)$. Weiter gilt:

Satz 9.4.7

(1) Für jedes $j \in \{1,..,n\}$ ist die Einschränkung von $T^{n,j}$ auf $(\tilde{C}^{n} \setminus \tilde{C}^{n,j})$ beste Approximation für $(\tilde{C}^{n} \setminus \tilde{C}^{n,j})$ bzgl. $\mathcal{OL}((\tilde{C}^{n} \setminus \tilde{C}^{n,j}), V^{j}_{o},..,V^{j}_{j})$.

(2) Für jedes $j \in \{1,..,n\}$ ist die Einschränkung von $T^{n,j}_{K^j}$ auf $(\tilde{C}^{n} \setminus \tilde{C}^{n,j}) \cap \tilde{C}^{n}_{K^j}$

(auf $(\tilde{C}^n \setminus \tilde{C}^{n,j}) \cap D^n_{K^j}$) beste Approximation für $(\tilde{C}^n \setminus \tilde{C}^{n,j}) \cap C^n_{K^j}$ (für $(\tilde{C}^n \setminus \tilde{C}^{n,j}) \cap D^n_{K^j}$) bzgl. $\mathcal{O}\mathcal{L}((\tilde{C}^n \setminus \tilde{C}^{n,j}) \cap \tilde{C}^n_{K^j}, V^j_0, \ldots, V^j_j)$ (bzgl. $\mathcal{O}\mathcal{L}((\tilde{C}^n \setminus \tilde{C}^{n,j}) \cap D^n_{K^j}, V^j_0, \ldots, V^j_j)$).

Beweis. (1) Wegen 2.4.5 genügt es zu zeigen, daß für $F \in (\tilde{C}^n \setminus \tilde{C}^{n,j})$ auch $T^{n,j}F \in (\tilde{C}^n \setminus \tilde{C}^{n,j})$ ist.

Sei etwa $x_0 = b$ ($M = [a,b]$) und j ungerade. Dann folgt $(\lambda(T^{n,j}F))^{(j)}(x) = -\lambda F^{(j)}(M)$ für alle $x \in M$. Wäre $T^{n,j}F \in \tilde{C}^{n,j}$, dann würde daraus insbesondere $(\lambda(T^{n,j}F))^{(j)} = 0$ folgen und damit $F^{(j)}(M) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Andererseits folgt aber aus $F^{(j)} = c$ stets $F \in \tilde{C}^{n,j}$; das ist ein Widerspruch zu $F \notin \tilde{C}^{n,j}$.

Also gilt (1).

Den Beweis von (2) erhält man ähnlich.

Analog beweist man den

Satz 9.4.8

$T^{n,n} = T^n$ ist beste Approximation für $\tilde{C}^{n,\emptyset} \cap \tilde{D}^n_\emptyset$ bzgl. $\mathcal{O}\mathcal{L}(\tilde{C}^{n,\emptyset} \cap \tilde{D}^n_\emptyset, V^n_0, \ldots, V^n_n)$.

Bemerkung 9.4.9

Die Approximation $T^{n,k}$ bildet für $k < n$ die Klasse $\tilde{C}^{n,\emptyset} \cap \tilde{D}^n_\emptyset$ nicht in sich ab. Denn wegen $(T^{n,k}F)^{(k+1)} = 0$ gilt stets $T^{n,k}F \in \tilde{C}^{n,k+1}$.

Daher sind für $k < n$ auch keine Optimalitätsaussagen für $T^{n,k}$ bzgl. $\tilde{C}^{n,\emptyset} \cap \tilde{D}^n_\emptyset$ möglich.

Die Einschränkung $R^{n,j}_{K^j}$ von $R^{n,j}_{K^j}$ auf $(\tilde{C}^{n,j} \setminus \tilde{C}^{n,j}) \cap \tilde{C}^n_{K^j} = \tilde{\mathbb{F}}^j$ ist berechenbar bzgl. der Wertzuweisungen $W^j_0, \ldots, W^j_j$, die für $F \in \tilde{\mathbb{F}}^j$ der Reihe nach definiert sind durch $F(x_0), \ldots, F^{(j-1)}(x_0)$, $\varphi F^{(j)}(M) \doteq [-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2$.

Da $\tilde{R}^{n,j}_{K^j}$ die Klasse $\tilde{\mathbb{F}}^j$ nicht in sich abbildet, so sind mit den zur Verfügung stehenden Mitteln keine Optimalitätsaussagen möglich. Man kann sich jedoch wieder genauso wie in § 4.2 behelfen, d.h. man kann zeigen, daß die Erweiterung von $\tilde{R}^{n,j}_{K^j}$ auf eine Obermenge von $\tilde{\mathbb{F}}^j$ beste berechenbare Approximation ist.

Sei $\mathbb{F}^j = \tilde{\mathbb{F}}^j \cup \tilde{\mathbb{F}}^j_{\setminus K^j}$. Da $\mathbb{F}^j$ und $\tilde{\mathbb{F}}^j_{\setminus K^j}$ disjunkt sind, so kann man definieren: Sei $\hat{R}^{n,j}_{K^j} : \mathbb{F}^j \to \tilde{\mathbb{F}}^j_{\setminus K^j}$ mit $\hat{R}^{n,j}_{K^j}F = \tilde{R}^{n,j}_{K^j}F$, falls $F \in \tilde{\mathbb{F}}^j$ bzw. $\hat{R}^{n,j}_{K^j}F = F$, falls $F \in \tilde{\mathbb{F}}^j_{\setminus K^j}$ ist. Dann ist $\hat{R}^{n,j}_{K^j}$ berechenbar bzgl. der Wertzuweisungen $W^j_0, \ldots, W^j_{j-1}$, $\hat{W}^j_j$, wobei $\hat{W}^j_j(F) = \varphi F^{(j)}(M) \oplus [-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2$ ist für $F \in \mathbb{F}^j$ (vgl. auch § 4.2).

Insbesondere folgt also $\hat{W}^j_j \mid (\tilde{C}^{n,j} \setminus \tilde{C}^{n,j}) \cap \tilde{C}^n_{K^j} = W^j_j$.

Weiter gilt

Satz 9.4.1o

$\hat{R}^{n,j}_{K^j}$ ist beste Approximation für $\mathbb{F}^j = ((\tilde{C}^{n,j} \setminus \tilde{G}^{n,j}) \cap \tilde{C}^n_{K^j}) \cup \tilde{\mathbb{P}}^j_{\varkappa_o K^j}$ bzgl. $\mathcal{O}\mathcal{L}(\mathbb{F}^j, W^j_o, \ldots, \hat{W}^j_j)$.

Der Beweis zu 9.4.1o verläuft ähnlich wie der zu 4.2.7, auf eine Durchführung soll daher verzichtet werden.

Klar ist die

Folgerung 9.4.11

Die Einschränkung von $\hat{R}^{n,j}_{K^j}$ auf $(\tilde{D}^n_{K^j} \cap (\tilde{C}^{n,j} \setminus \tilde{G}^{n,j})) \cup \tilde{\mathbb{P}}^j_{\varkappa_o K^j}$ ist beste Approximation für $(\tilde{D}^n_{K^j} \cap (\tilde{C}^{n,j} \setminus \tilde{G}^{n,j})) \cup \tilde{\mathbb{P}}^j_{\varkappa_o K^j}$ bzgl. der Klasse von Approximationen $\mathcal{O}\mathcal{L}((\tilde{D}^n_{K^j} \cap (\tilde{C}^{n,j} \setminus \tilde{G}^{n,j})) \cup \tilde{\mathbb{P}}^j_{\varkappa_o K^j}, W^j_o, \ldots, \hat{W}^j_j)$.

9.5 Vergleichbarkeit der $R^{n,k}$ bzw. $R^{n,s}_{K^j}$ mit den schon bekannten Approximationen gleicher Ordnung

Auch wenn man für die Approximationen $R^{n,s}_{K^j}$ keine Optimalitätsaussagen für die gesamte Klasse $\tilde{C}^n_{K^j} \cap \tilde{C}^{n,s}$ machen kann, so kann man doch immer noch zeigen, daß sie bessere Einschließungen liefern als alle bisher konstruierten Approximationen gleicher Ordnung. Es gilt

Satz 9.5.1

(1) Für alle $j \in \{1,..,n\}$ und für alle $F \in \tilde{C}^{n,j}(M, \mathbb{I})$ gilt $R^{n,j}F \leq T^{n,j}F$.

(2) Sei $j \in \{1,..,n\}$ und $s \in \{j,..,n\}$.
Dann gilt für alle $F \in \tilde{C}^n_{K^j}(M, \mathbb{I}) \cap \tilde{C}^{n,s}(M, \mathbb{I})$ $R^{n,s}_{K^j}F \leq R^{n,s}F$ und $R^{n,s}_{K^j}F \leq T^{n,s}_{K^j}F$.

(3) Sei $j \in \{1,..,n\}$ und $s \in \{j,..,n\}$.
Dann folgt für alle $F \in \tilde{C}^n_{K^j}(M, \mathbb{I}) \cap \tilde{C}^{n,s}(M, \mathbb{I})$ $R^{n,s}_{K^j}F \leq R^{n,s}_{K^j}F$.

Beweis. (1) Für $F \in \tilde{G}^{n,j}$ ist $R^{n,j}F(x) = S^jF(x) \dot{+} h^j([-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} .. \dot{+} \varphi F^{(j)}(M))/j!$, wobei $S^jF(x) = T^{n,j}F(x) \ominus h^jF^{(j)}(M)/j!$ ist für $x \in M$ und $h = (x-x_o)$. Weiter ist $F^{(j)}(M) \cap ([-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j)}(M)) \neq \emptyset$. Andererseits gilt für Intervalle $A,B,C \in \mathbb{I}$ mit $\lambda B \leq \lambda A$ aber $A \dot{+} B \subset A+C$ genau dann, wenn $B \cap C \neq \emptyset$ ist. Also gilt die Behauptung.
Falls $F \in \tilde{C}^{n,j} \setminus \tilde{G}^{n,j}$ ist, so erhält man die Behauptung aus der Inklusion $\varphi F^{(j)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}/2 \subset F^{(j)}(M)$ und der Isotonie der Intervalladdition.

(2) und (3) folgen ähnlich wie (1), wenn man noch beachtet:
Für Intervalle $A,B \in \mathbb{I}$ mit $\lambda B \leq \lambda A$ gilt die Inklusion $A \dot{+} B \subset A+B$.

Die folgende Aussage gibt Auskunft darüber, wann in 9.5.1 die Gleichheit eintreten kann.

Satz 9.5.2

(1) Für $F \in \tilde{G}^{n,j}(M, \mathbb{I})$ tritt genau dann Gleichheit ein in 9.5.1,(1), wenn $F^{(j)} = c$ ist für ein $c \in \mathbb{R}$.
Falls $F \in \tilde{C}^{n,j} \setminus \tilde{G}^{n,j}$ ist, so tritt genau dann Gleichheit ein, wenn $\min_M \lambda F^{(j)}(x) = o$ ist und $F^{(j)}(M) = \varphi F^{(j)}(M)$.

Für $F \in \tilde{C}^n_{K^j}(M, \mathbb{I}) \cap \tilde{C}^{n,s}(M, \mathbb{I})$ gelten für das Eintreten der Gleichheit $R^{n,s}_{K^j}F = T^{n,s}_{K^j}F$ analoge Kriterien zu vorher (es ist lediglich j durch s zu ersetzen).

(2) Für $F \in \tilde{C}^n_{K^j}(M, \mathbb{I}) \cap \tilde{C}^{n,s}(M, \mathbb{I})$ ist genau dann $R^{n,s}_{K^j}F = R^{n,s}_{K^j}F$ bzw.

$R^{n,s}_F = R^{n,s}_{K^j_F}$, falls $K^s_F = K^j$ bzw. falls $K^j = \emptyset$ ist.

Beweis. (1) Es sei $R^{n,j}_F = T^{n,j}_F$. Falls $F \in \tilde{G}^{n,j}$ ist, so erhält man aus der Definition von $\dot{+}$ und aus der Kürzungsregel die Gültigkeit von

$\dot{0} = F^{(j)}(M) - ([-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \varphi_F{}^{(j)}(M))$.

Nun gilt für Intervalle $A,B \in \mathbb{I}$ die Gleichheit $\dot{0} = A - B$ genau dann, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $A = B = \dot{c}$.

Also folgt $F^{(j)}(M) = \dot{c}$ für ein $c \in \mathbb{R}$, d.h. die Behauptung.

Die Umkehr dieser Aussage ist klar.

Falls $F \in \tilde{C}^{n,j} \setminus \tilde{G}^{n,j}$ ist, so folgt aus $R^{n,j}_F = T^{n,j}_F$ notwendig

$\varphi F^{(j)}(M) \dot{+} ([-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2) = F^{(j)}(M)$.

Wegen $\varphi F^{(j)}(M) \subset F^{(j)}(M)$ erhält man also $\min_M \lambda F^{(j)}(x) = 0$ und $F^{(j)}(M) = \varphi_F{}^{(j)}(M)$, wenn man $A \dot{+} B \subset A$ beachtet für $A,B \in \mathbb{I}$ mit $\lambda A \geq \lambda B$, $\dot{0} \subset B$.

Die Umkehr ist klar.

(2) Es sei $R^{n,s}_{K^j_F} = R^{n,s}_{K^j_{\tilde{F}}}$ für $F \in \tilde{C}^n_{K^j} \cap \tilde{C}^{n,s}$. Angenommen, es ist $K^j \subsetneq K^s_F$.

Dann folgt nach einigen Zwischenschritten

$$\dot{0} = \sum_{k \in K^s_F \setminus K^j} (x-x_0)^k \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!} - \sum_{k \in K^s_F \setminus K^j} (x-x_0)^k \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!}$$

für alle $x \in M$. Daraus erhält man $\lambda F^{(k)}(x_0) = 0$ für alle $k \in K^s_F \setminus K^j$.

Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme, also gilt $K^s_F = K^j$.

Falls $K^s_F = K^j$ ist, so folgt die Behauptung unmittelbar.

Bemerkung 9.5.3

Wegen 9.5.1,(3) kommt man in der Praxis mit dem Spezialfall von Satz 9.3.8, d.h. mit Satz 9.3.5 aus. Daher sollen auch in Zukunft die Einschließungen der Form $R^{n,s}_{K^j_F}$ für $F \in \tilde{C}^n_{K^j} \cap \tilde{C}^{n,s}$ nicht mehr berücksichtigt werden.

Bemerkung 9.5.4

Bisher wurden nur Approximationen gleicher Ordnung auf Vergleichbarkeit untersucht. Dies ist natürlich auch für Approximationen verschiedener Ordnung möglich. Wegen des größeren Umfangs wird dies in § 10 nachgeholt.

Es sollen nun einige Beispiele für die Einschließungsaussagen von 9.3 betrachtet werden.

Beispiel 9.5.5

Sei $M = [-1,0]$, $x_0 = 0$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [x^3, e^x]$ und $n = 5$.

Es ist $F \in \tilde{C}^5$. Weiter erhält man mit Schema (S) aus § 7 $K^5_F = \{1\}$.

Wegen $\lambda F(x_0) < \lambda F(-1)$ gilt $F \notin \tilde{C}^{5,1}$. Daraus und wegen $1 \in K^5_F$ folgt mit 9.2.12

9.5 Vergleichbarkeit der $R^{n,k}$ bzw. $R_K^{n,s}$ mit den schon bekannten Approximationen gleicher Ordnung

Auch wenn man für die Approximationen $R_K^{n,s}$ keine Optimalitätsaussagen für die gesamte Klasse $\tilde{C}_K^n \cap \tilde{C}^{n,s}$ machen kann, so kann man doch immer noch zeigen, daß sie bessere Einschließungen liefern als alle bisher konstruierten Approximationen gleicher Ordnung. Es gilt

Satz 9.5.1

(1) Für alle $j \in \{1,..,n\}$ und für alle $F \in \tilde{C}^{n,j}(M, \mathbb{I})$ gilt $R^{n,j}F \leq T^{n,j}F$.

(2) Sei $j \in \{1,..,n\}$ und $s \in \{j,..,n\}$.
Dann gilt für alle $F \in \tilde{C}_{K^j}^n(M, \mathbb{I}) \cap \tilde{C}^{n,s}(M, \mathbb{I})$ $R_{K^j}^{n,s}F \leq R^{n,s}F$ und $R_{K^j}^{n,s}F \leq T_{K^j}^{n,s}F$.

(3) Sei $j \in \{1,..,n\}$ und $s \in \{j,..,n\}$.
Dann folgt für alle $F \in \tilde{C}_{K^j}^n(M, \mathbb{I}) \cap \tilde{C}^{n,s}(M, \mathbb{I})$ $R_{K^j}^{n,s}F \leq R_{K^j}^{n,s}F$.

Beweis. (1) Für $F \in \tilde{G}^{n,j}$ ist $R^{n,j}F(x) = S^jF(x) \dot{+} h^j([-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} .. .. \dot{+} \varphi F^{(j)}(M))/j!$, wobei $S^jF(x) = T^{n,j}F(x) \ominus h^jF^{(j)}(M)/j!$ ist für $x \in M$ und $h = (x-x_o)$. Weiter ist $F^{(j)}(M) \cap ([-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j)}(M)) \neq \emptyset$. Andererseits gilt für Intervalle $A,B,C \in \mathbb{I}$ mit $\lambda B \leq \lambda A$ aber $A \dot{+} B \subset A+C$ genau dann, wenn $B \cap C \neq \emptyset$ ist. Also gilt die Behauptung.
Falls $F \in \tilde{C}^{n,j} \setminus \tilde{G}^{n,j}$ ist, so erhält man die Behauptung aus der Inklusion $\varphi F^{(j)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}/2 \subset F^{(j)}(M)$ und der Isotonie der Intervalladdition.

(2) und (3) folgen ähnlich wie (1), wenn man noch beachtet:
Für Intervalle $A,B \in \mathbb{I}$ mit $\lambda B \leq \lambda A$ gilt die Inklusion $A \dot{+} B \subset A+B$.

Die folgende Aussage gibt Auskunft darüber, wann in 9.5.1 die Gleichheit eintreten kann.

Satz 9.5.2

(1) Für $F \in \tilde{G}^{n,j}(M, \mathbb{I})$ tritt genau dann Gleichheit ein in 9.5.1,(1), wenn $F^{(j)} = c$ ist für ein $c \in \mathbb{R}$.
Falls $F \in \tilde{C}^{n,j} \setminus \tilde{G}^{n,j}$ ist, so tritt genau dann Gleichheit ein, wenn $\min_M \lambda F^{(j)}(x) = o$ ist und $F^{(j)}(M) = \varphi F^{(j)}(M)$.
Für $F \in \tilde{C}_{K^j}^n(M, \mathbb{I}) \cap \tilde{C}^{n,s}(M, \mathbb{I})$ gelten für das Eintreten der Gleichheit $R_{K^j}^{n,s}F = T_{K^j}^{n,s}F$ analoge Kriterien zu vorher (es ist lediglich j durch s zu ersetzen).

(2) Für $F \in \tilde{C}_{K^j}^n(M, \mathbb{I}) \cap \tilde{C}^{n,s}(M, \mathbb{I})$ ist genau dann $R_{K^j}^{n,s}F = R_{K_F^s}^{n,s}F$ bzw.

$R^{n,s}_F = R^{n,s}_{K^j_F}$, falls $K^s_F = K^j$ bzw. falls $K^j = \emptyset$ ist.

Beweis. (1) Es sei $R^{n,j}_F = T^{n,j}_F$. Falls $F \in \tilde{G}^{n,j}$ ist, so erhält man aus der Definition von $\dot{+}$ und aus der Kürzungsregel die Gültigkeit von
$\dot{O} = F^{(j)}(M) - ([-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j)}(M))$.
Nun gilt für Intervalle $A,B \in \mathbb{I}$ die Gleichheit $\dot{O} = A - B$ genau dann, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $A = B = \dot{c}$.
Also folgt $F^{(j)}(M) = \dot{c}$ für ein $c \in \mathbb{R}$, d.h. die Behauptung.
Die Umkehr dieser Aussage ist klar.

Falls $F \in \tilde{C}^{n,j} \setminus \tilde{G}^{n,j}$ ist, so folgt aus $R^{n,j}_F = T^{n,j}_F$ notwendig
$\varphi F^{(j)}(M) \dot{+} ([-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2) = F^{(j)}(M)$.
Wegen $\varphi F^{(j)}(M) \subset F^{(j)}(M)$ erhält man also $\min_M \lambda F^{(j)}(x) = o$ und
$F^{(j)}(M) = \varphi F^{(j)}(M)$, wenn man $A \dot{+} B \subset A$ beachtet für $A,B \in \mathbb{I}$ mit $\lambda A \geq \lambda B$, $\dot{O} \subset B$.
Die Umkehr ist klar.

(2) Es sei $R^{n,s}_{K^j_F} = R^{n,s}_{K^s_F} F$ für $F \in \tilde{C}^n_{K^j} \cap \tilde{C}^{n,s}$. Angenommen, es ist $K^j \subsetneq K^s_F$.
Dann folgt nach einigen Zwischenschritten

$$\dot{O} = \sum_{k \in K^s_F \setminus K^j} (x-x_o)^k \frac{F^{(k)}(x_o)}{k!} - \sum_{k \in K^s_F \setminus K^j} (x-x_o)^k \frac{F^{(k)}(x_o)}{k!}$$

für alle $x \in M$. Daraus erhält man $\lambda F^{(k)}(x_o) = o$ für alle $k \in K^s_F \setminus K^j$.
Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme, also gilt $K^s_F = K^j$.

Falls $K^s_F = K^j$ ist, so folgt die Behauptung unmittelbar.

Bemerkung 9.5.3

Wegen 9.5.1,(3) kommt man in der Praxis mit dem Spezialfall von Satz 9.3.8, d.h. mit Satz 9.3.5 aus. Daher sollen auch in Zukunft die Einschließungen der Form $R^{n,s}_{K^j_F} F$ für $F \in \tilde{C}^n_{K^j} \cap \tilde{C}^{n,s}$ nicht mehr berücksichtigt werden.

Bemerkung 9.5.4

Bisher wurden nur Approximationen gleicher Ordnung auf Vergleichbarkeit untersucht. Dies ist natürlich auch für Approximationen verschiedener Ordnung möglich. Wegen des größeren Umfangs wird dies in § 10 nachgeholt.

Es sollen nun einige Beispiele für die Einschließungsaussagen von 9.3 betrachtet werden.

Beispiel 9.5.5

Sei $M = [-1,0]$, $x_o = 0$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [x^3, e^x]$ und $n = 5$.
Es ist $F \in \tilde{C}^5$. Weiter erhält man mit Schema (S) aus § 7 $K^5_{F^5} = \{1\}$.
Wegen $\lambda F(x_o) < \lambda F(-1)$ gilt $F \notin \tilde{C}^{5,1}$. Daraus und wegen $1 \in K^5_F$ folgt mit 9.2.12

sofort $F \notin \tilde{C}^{5,2}$. Wegen $3,4 \notin K_F^5$ und $\lambda F^{(k)}(x_o) > o$ für $k = 3,4$ erhält man weiter $F \notin \tilde{C}^{5,3}$, $F \notin C^{5,4}$. Es ist $(\lambda F)^{(5)} > o$ auf M und daher wegen $x_o = b$ $F \in C^{5,5}$ (vergl. 9.2.4). Also ist $M_F^5 = \{5\}$.
Wegen $F^{(5)}(x) = [o, e^x]$ für alle $x \in M$ folgt weiter $\min_M \lambda F^{(5)}(x) = 1/e$ und $\gamma F^{(5)}(M) = [1/2e, 1/2]$. Es ist $\lambda(\gamma F^{(5)}(M)) = (e-1)/2e < 1/e$ und daher $F \in \tilde{G}^{5,5}$. Wegen 9.3.1, 9.3.5 bzw. 9.5.1 erhält man daher

$$F \leq R^{5,5}_{K_F^5} F \leq \left\{ \begin{matrix} R^{5,5}F \\ T^{5,5}_{K_F^5} F \end{matrix} \right\} \leq T^{5,5}F .$$

Es tritt nirgendwo Gleichheit ein zwischen den verschiedenen Approximationen für F, da $K_F^5 \neq \emptyset$ ist und da nicht gilt $F^{(5)} = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ (vergl. 9.5.2).

Da $k = 4$ das kleinste k mit $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ ist und $K_F^5 = \{1\}$, so erhält man mit 8.3.3 , daß $T^{5,4}_{K_F^5} F$ minimales Element der geordneten Menge $\langle \{T^{5,1}F, .., T^{5,5}F\} \cup \{T^{5,1}_{K_F^5} F, .., T^{5,5}_{K_F^5} F\}, \leq \rangle$ ist. Wegen $K_F^4 = K_F^5$ und $F^{(4)}(M) = F^{(4)}(x_o)$ ist insbesondere $T^{5,4}_{K_F^5} F \leq T^{5,5}_{K_F^5} F$.
Da $F \notin \tilde{C}^{5,4}$ ist, so ist $T^{5,4}_{K_F^5} F$ nicht durch Intervallzerlegung verbesserbar.
Mit Hilfe von in § 10 entwickelten Methoden oder durch Nachrechnen zeigt man, daß die Approximationen $R^{5,5}_{K_F^5} F$ und $T^{5,4}_{K_F^5} F$ nicht vergleichbar sind bzgl. $\leq$.

Beispiel 9.5.6

Sei $M = [1,2]$, $x_o = 1$ und $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [x^2, 4+(1/x)]$, $n = 3$.
Dann ist $F \in \tilde{C}^3$. Weiter gilt $K_F^3 = \{1\}$.
Wegen $(\lambda F)''' < o$ und $x_o = a$ folgt aus 9.2.4 $F \in \tilde{C}^{3,3}$.
Wegen $F \in \tilde{C}^{3,3}$ und $(\lambda F)''(x_o) = o$ folgt aus 9.2.11 $F \in \tilde{C}^{3,2}$.
Wegen $F \in \tilde{C}^{3,2}$ und $1 \in K_F^3$ folgt aus 9.2.11 $F \in \tilde{C}^{3,1}$.
Es ist $\gamma F'(M) = [1/2, 15/8]$, also $\lambda(\gamma F'(M)) = 11/8 < \min_M \lambda F'(x) = 3$.
Also folgt $F \in \tilde{G}^{3,1}$.
Es ist $\min_M \lambda F''(x) = o < \lambda(\gamma F''(M)) = \lambda[9/8, 2]$, daher gilt $F \in (\tilde{C}^{3,2} \setminus \tilde{G}^{3,2})$.
Schließlich gilt $\min_M \lambda F'''(x) = 3/8 < \lambda(\gamma F'''(M)) = \lambda[-3, -3/16]$, also folgt $F \in (\tilde{C}^{3,3} \setminus \tilde{G}^{3,3})$.
Damit erhält man als Verbesserung der gewöhnlichen Taylor-Einschließungen die Approximationen $R^{3,k}F$ für F, $k = 1,2,3$. Wegen 9.5.1 gilt $R^{3,k}F \leq T^{3,k}F$ für $k = 1,2,3$, und wegen 9.5.2 tritt in keinem Fall die Gleichheit ein.
Es ist $K_F^3 = \{1\}$ und $F''(x_o) \neq F''(M)$; wegen 8.3.3 ist daher $T^{3,3}_{K_F^3} F$ minimales Element von $\langle \{T^{3,1}F, .., T^{3,3}F\} \cup \{T^{3,1}_{K_F^3} F, .., T^{3,3}_{K_F^3} F\}, \leq \rangle$.
Wegen 9.5.1 gilt $R^{3,3}_{K_F^3} F \leq T^{3,3}_{K_F^3} F$, und es tritt wegen 9.5.2 keine Gleichheit ein.

9.6 Andere Formen der Taylor-Approximation bei Intervallzerlegung

Zur Herleitung der Einschließung $R^{n,k}F$ für $F \in \tilde{C}^{n,k}$ wurden die (reellen) Abbildungen $\vee F$ und $\wedge F$ jeweils in eine Taylorreihe der gleichen Ordnung k entwickelt. Es stellt sich die Frage, ob man auch brauchbare Einschließungsaussagen erhält, wenn man statt dessen Taylorentwicklungen verschiedener Ordnungen benutzt. Insbesondere interessiert in diesem Zusammenhang natürlich auch, ob man auf diese Weise Approximationen für die Klassen $\tilde{C}^{n,k}$ erhalten kann, die (im Gegensatz zu den $R^{n,k}$) die jeweils gesamte Klasse $\tilde{C}^{n,k}$ wieder in sich abbilden und, falls ja, ob man dadurch die durch die $R^{n,k}$ erzielten Einschließungen verbessern kann.
Diese Fragen sollen in 9.6 untersucht werden.

Es gilt die folgende Einschließungsaussage.

Satz 9.6.1
Sei $F \in \tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I})$, wobei $k \in \{2,..,n\}$ bzw. $k \in \{1,..,n-1\}$ ist. Dann folgt:

(1) Für alle $j \in \{1,..,k-1\}$ ist der intervallarithmetische Ausdruck

$$(\alpha)\quad (F(x_o)+hF'(x_o)+..+h^{j-1}\frac{F^{(j-1)}(x_o)}{(j-1)!}+h^j\frac{\varphi F^{(j)}(M)+[-1,1]\,\wedge F^{(j)}(x_o)/2}{j!}$$
$$..+h^{j+1}\frac{[-1,1]\,\wedge F^{(j+1)}(x_o)}{2\cdot(j+1)!}+..+h^{k-1}\frac{[-1,1]\,\wedge F^{(k-1)}(x_o)}{2\cdot(k-1)!})$$
$$\dot{+}\, h^k\frac{[-1,1]\min_M \wedge F^{(k)}(x)/2}{k!},\quad x\in M,$$

definiert, den wir in Zukunft abkürzend mit $R^{n,j,k}F(x)$ bezeichnen wollen. Weiter ist für alle $x\in M$ $F(x) \subset R^{n,j,k}F(x)$.

(2) Für alle $j\in\{k+1,..,n\}$ und für alle $x\in M$ ist der Ausdruck

$$(\beta)\quad (F(x_o)+hF'(x_o)+..+h^{k-1}\frac{F^{(k-1)}(x_o)}{(k-1)!}+h^{k+1}\frac{\varphi F^{(k+1)}(x_o)}{(k+1)!}+..$$
$$..+h^j\frac{\varphi F^{(j)}(M)}{j!})\dot{+}\, h^k\frac{[-1,1]\min_M \wedge F^{(k)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(k)}(x_o)}{k!},$$

den wir in Zukunft mit $R^{n,j,k}F(x)$ bezeichnen wollen, definiert, und es gilt $F(x) \subset R^{n,j,k}F(x)$ für alle $x\in M$.

Beweis. Der Beweis von 9.6.1 verläuft ähnlich wie der von 9.3.1. Auf eine Durchführung soll daher verzichtet werden.

Bemerkung 9.6.2

(1) Für $F \in \tilde{C}^{n,k}$ wird durch (α) bzw. (β) aus 9.6.1 jeweils ein verallgemeinertes I-Polynom $R^{n,j,k}F$ definiert. Durch die Zuordnung $F \mapsto R^{n,j,k}F$ wird daher ein Approximationsoperator $R^{n,j,k}$ für die Klasse $\tilde{C}^{n,k}$ definiert. Wegen $\mathbb{P}^k_{r_o\{k\}} \subset \tilde{C}^{n,k}$ ist $R^{n,j,k}$ im Falle $j < k$ eine Abbildung von $\tilde{C}^{n,k}$ in sich. Für $j > k$ ist dies hingegen nicht mehr der Fall (es ist $\mathbb{P}^j_{r_o\{k\}} \not\subset \tilde{C}^{n,k}$).

(2) Läßt man in 9.6.1 auch $j = k$ zu, so erhält man die aus 9.3.1 her bekannte Einschließung $R^{n,k}$ für $\tilde{C}^{n,k}$, d.h. es gilt $R^{n,k,k} = R^{n,k}$.

Die Approximationen $R^{n,j,k}$ sind für jedes $j \in \{1,..,n\}$ berechenbar. Von $R^{n,k,k}$ wissen wir weiterhin, daß die Einschränkung auf $\tilde{C}^{n,k}$ beste Approximation ist bezüglich aller Approximationen, die berechenbar sind mit den gleichen Wertzuweisungen wie $R^{n,k}$. Es stellt sich daher die Frage nach der Optimalität der $R^{n,j,k}$ für $j \neq k$.
Da für $j > k$ keine Abbildungen von $\tilde{C}^{n,k}$ in sich vorliegen, so sind für diesen Fall keine Aussagen möglich. Für $j < k$ ist jede der Approximationen $R^{n,j,k}$ berechenbar bzgl. der Wertzuweisungen $V_o,..,V_k : \tilde{C}^{n,k} \to \mathbb{I}$ mit
$V_o(F) = F(x_o),..,V_{j-1}(F) = F^{(j-1)}(x_o)$, $V_j(F) = \varphi F^{(j)}(M) + [-1,1]\lambda F^{(j)}(x_o)/2$,
$V_{j+1}(F) = [-1,1]\lambda F^{(j+1)}(x_o)/2,..,V_{k-1}(F) = [-1,1]\lambda F^{(k-1)}(x_o)/2$ und
$V_k(F) = [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2$ für $F \in \tilde{C}^{n,k}$.
Weiter gilt

Satz 9.6.3

Für jedes $j \in \{1,..,k-1\}$ ist $R^{n,j,k}$ beste Approximation für $\tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I})$ bzgl. jener Klasse von Approximationen für $\tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I})$, deren Elemente berechenbar sind bzgl. der Wertzuweisungen $V_o,..,V_k$, d.h. bzgl. $\mathfrak{S}(\tilde{C}^{n,k}, V_o,..,V_k)$.

Beweis. Nach 2.4.5 genügt es zu zeigen, daß $V_i(F) = V_i(R^{n,j,k}F)$ ist für alle $F \in \tilde{C}^{n,k}$ und jedes $i \in \{o,..,j\}$.
Sei also $F \in \tilde{C}^{n,k}$ beliebig. Für $i < j$ erhält man dann die Behauptung sofort aus den Differenzierbarkeitseigenschaften von $R^{n,j,k}F$.

Für $i = j$ erhält man $(R^{n,j,k}F)^{(j)}(x) = (\varphi F^{(j)}(M) + [-1,1]\lambda F^{(j)}(x_o)/2) + ..$
$..+ (x-x_o)^{i-j} \frac{[-1,1]\lambda F^{(i)}(x_o)/2}{(i-j)!} \oplus (x-x_o)^{k-j} \frac{[-1,1]\lambda \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2}{(k-j)!}$
für jedes $x \in M$, vgl. 5.3.4 und 5.3.6. Durch Anwenden von λ und φ folgt damit
$\varphi(R^{n,j,k}F)^{(j)}(M) = \varphi(\varphi F^{(j)}(M))$ und $\lambda(R^{n,j,k}F)^{(j)}(x_o) = \lambda(\varphi F^{(j)}(M) + \lambda F^{(j)}(x_o))$, denn für symmetrische Intervalle A ist $\varphi A = o$.

Also gilt $V_j(R^{n,j,k}F) = \varphi(R^{n,j,k}F)^{(j)}(M) + [-1,1]\lambda(R^{n,j,k}F)^{(j)}(x_o)/2 =$

$= \varphi(\varphi F^{(j)}(M)) + [-1,1](\lambda(\varphi F^{(j)}(M)) + \lambda F^{(j)}(x_o))/2 =$

$= F^{(j)}(M) + [-1,1]\lambda F^{(j)}(x_o)/2 = V_j(F)$ wegen $A = \varphi A + [-1,1]\lambda A/2$ für $A \in \mathbb{I}$.

Für $i > j$ folgt die Behauptung wieder direkt aus den Regeln über die Differenzierbarkeit von I-Funktionen der Form $F = F_1 \oplus F_2$, vgl. 5.3.4.

Wir stellen fest, daß die $R^{n,j,k}$ für $j < k$ beste Approximationen für $\tilde{C}^{n,k}$ sind; für $j = k$ hingegen kann man nur noch Optimalität für eine Teilmenge von $\tilde{C}^{n,k}$ nachweisen, vgl. § 4.2.
Als nächstes soll untersucht werden, ob (was ja insbesondere für $\tilde{C}^{n,k} \setminus \tilde{G}^{n,k}$ wünschenswert wäre) man mit den $R^{n,j,k}$ bessere Einschließungen erzielt als mit $R^{n,k}$. Es gilt

Satz 9.6.4
Sei $F \in \tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I}) \setminus \tilde{G}^{n,k}(M, \mathbb{I})$ und $j < k$, dann folgt:

(1) Es kann nicht gelten $R^{n,j,k}F \leq R^{n,k}F$.

(2) Es ist $R^{n,k}F \leq R^{n,j,k}F$ genau dann, wenn für alle $x \in M$

$$h\frac{\varphi F^{(j+1)}(x_o)}{j+1} + \ldots h^{k-j-1}\frac{\varphi F^{(k-1)}(x_o)}{(j+1)\ldots(k-1)} + h^{k-j}\frac{\varphi F^{(k)}(M)}{(j+1)\ldots k}$$

$$\subset \varphi F^{(j)}(M) - \varphi F^{(j)}(x_o)$$

ist mit $h = (x - x_o)$.

Beweis. (1) Angenommen, es ist $R^{n,j,k}F \leq R^{n,k}F$ für ein $j < k$. Mit $h = (x - x_o)$ würde dann für alle $x \in M$ folgen

$$(\varphi F^{(j)}(M) + [-1,1]\lambda F^{(j)}(x_o)/2) + h\frac{[-1,1]F^{(j+1)}(x_o)}{2(j+1)} + \ldots + h^{k-j-1}\frac{[-1,1]\lambda F^{(j)}(x_o)}{2(j+1)\cdot\ldots\cdot(k-1)}$$

$$\subset F^{(j)}(x_o) + h\frac{F^{(j+1)}(x_o)}{j+1} + \ldots + h^{k-j}\frac{\varphi F^{(k)}(M) + [-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2}{(j+1)\ldots\ldots k}$$

$$\ldots - h^{k-j}\frac{[-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2}{(j+1)\ldots\ldots k}.$$

Hieraus folgt nun insbesondere $\varphi F^{(j)}(M) + [-1,1]\lambda F^{(j)}(x_o)/2 \subset F^{(j)}(x_o)$. Zerlegt man $F^{(j)}(x_o)$ mittels der Funktionale φ und λ, so erhält man auch die Gültigkeit von $F^{(j)}(x_o) \subset \varphi F^{(j)}(M) + [-1,1]\lambda F^{(j)}(x_o)/2$ und damit die Gleichheit. Wegen der in $\langle \mathbb{I}, + \rangle$ gültigen Kürzungsregel folgt schließlich $\varphi F^{(j)}(M) = \varphi F^{(j)}(x_o)$ und damit $\varphi F^{(k)}(M) = \zeta$. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung $F \in \tilde{C}^{n,k} \setminus \tilde{G}^{n,k}$.

(2) Es gelte $R^{n,k}F \leq R^{n,j,k}F$. Dann folgt für alle $x \in M$

$$F^{(j)}(x_o) + h\frac{F^{(j+1)}(x_o)}{j+1} + \ldots + h^{k-j}\frac{\varphi F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2}{(j+1)\ldots k}$$

$$- h^{k-j}\frac{[-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2}{(j+1)\ldots k} \subset (\varphi F^{(j)}(M) + [-1,1]\lambda F^{(j)}(x_o)/2) +$$

$$+ h\frac{[-1,1]\lambda F^{(j+1)}(x_o)/2}{j+1} + \ldots + h^{k-j-1}\frac{[-1,1]\lambda F^{(k-1)}(x_o)/2}{(j+1)\ldots(k-1)},$$

wobei $h = (x-x_o)$ ist.

Nun gilt für Intervalle $A,B \in \mathbb{I}$ und $b \in \mathbb{R}$ $(A+B) \ominus (b+B) = A - b$ bzw. $(b+B) \ominus B = b$ bzw. $(A + B) \ominus B = A$. Zerlegt man die Intervalle $F^{(i)}(x_o)$ für $i = j,..,k-1$ mittels der Funktionale φ und λ, und beachtet man obige Rechenregeln, so erhält man aus der letzten Inklusion die Behauptung.

Es gelte nun die Voraussetzung aus (2). Wegen der Gültigkeit von $(A \dot{+} B) - B = A$ für $A,B \in \mathbb{I}$ mit $\lambda B \leq \lambda A$ bzw. wegen $(A+B) \ominus (b+B) = A - b$ für $A,B \in \mathbb{I}$ und $b \in \mathbb{R}$ folgt dann für alle $x \in M$

$$h\frac{\varphi F^{(j+1)}(x_o)}{j+1} + \ldots + h^{k-j}\frac{\varphi F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2}{(j+1)\ldots k}$$

$$- h^{k-j}\frac{[-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2}{(j+1)\ldots k} \subset (\varphi F^{(j)}(M) + [-1,1]\lambda F^{(j)}(x_o)/2) \ominus F^{(j)}(x_o),$$

wobei $h = (x-x_o)$ ist. Daraus erhält man wegen $A+C \subset B$ für $A,B,C \in \mathbb{I}$ mit $\lambda B \geq \lambda C$ und $A \subset B \ominus C$ und wegen der Isotonie der Intervalladdition die Behauptung, wenn man noch die Inklusion $A \subset C \dot{+} B$ für $A,B,C \in \mathbb{I}$ mit $\lambda B \leq \lambda C$ und $A - B \subset C$ beachtet.

Auch für $F \in \tilde{G}^{n,k}$ liefern die $R^{n,j,k}F$ für $j \in \{1,..,k-1\}$ keine besseren Einschließungen als $R^{n,k}F$, denn es gilt

Satz 9.6.5

Sei $F \in \tilde{G}^{n,k}(M, \mathbb{I})$ und $j < k$, dann gilt:

(1) Falls $R^{n,j,k}F \leq R^{n,k}F$ ist, dann folgt $R^{n,j,k}F = R^{n,k}F$.

(2) Es ist $R^{n,k}F \leq R^{n,j,k}F$ genau dann, wenn für alle $x \in M$

$$h\frac{\varphi F^{(j+1)}(x_o)}{j+1} + \ldots + h^{k-j}\frac{\varphi F^{(k)}(M)}{(j+1)..k} \subset (\varphi F^{(j)}(M) - \varphi F^{(j)}(x_o))$$

ist mit $h = (x-x_o)$.

Beweis. (1) Es sei $R^{n,j,k}F \leq R^{n,k}F$. Dann erhält man mit bekannten Methoden $\varphi F^{(j)}(M) + [-1,1]\lambda F^{(j)}(x_o)/2 \subset F^{(j)}(x_o)$ und daraus durch Intervall-

zerlegung die Gleichheit $\varphi F^{(j)}(M) = \varphi F^{(j)}(x_o)$. Also ist $\varphi F^{(j+i)} = o$ für $i = 1,..,k-j$, und daher folgt $F^{(j+i)}(x_o) = [-1,1]\, F^{(j+i)}(x_o)/2$ für $i = 1,..,k-j-1$, $\varphi F^{(j)}(M) + [-1,1]\lambda F^{(j)}(x_o)/2 = F^{(j)}(x_o)$ und $[-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(k)}(M) = [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2$.
Also gilt $R^{n,j,k}F = R^{n,k}F$ (zur Definition von $R^{n,j,k}F$ vergl. 9.6.1).

(2) Es sei $R^{n,k}F \leq R^{n,j,k}F$. Daraus folgt dann ähnlich wie in 9.6.4,(2) folgende Inklusion für $x \in M$ mit $h = (x-x_o)$

$$h\,\frac{\varphi F^{(j+1)}(x_o)}{j+1} + .. + h^{k-j-1}\,\frac{\varphi F^{(k-1)}(x_o)}{(j+1)\cdot..\cdot(k-j-1)} - h^{k-j}\,\frac{[-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2}{(j+1)\cdot..\cdot k}$$

$$\subset (\varphi F^{(j)}(M) - \varphi F^{(j)}(x_o)) - h^{k-j}\,\frac{[-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(k)}(M)}{(j+1)\cdot..\cdot k}\ .$$

Nun gilt für Intervalle A,B,C mit $\lambda B \leq \lambda A$ und $A \subset C - B$ immer die Inklusion $A \dot{+} B \subset C$ bzw. die Gleichheit $(-A) \dot{+} (A \dot{+} B) = B$.
Wendet man diese Aussagen auf obige Inklusion an, so erhält man die Behauptung.
Die Umkehr von (2) geht analog.

Aus 9.6.4 und 9.6.5 erhält man die

Folgerung 9.6.6

Es sei $F \in \tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I})$ und $j < k$. Dann gilt $R^{n,j,k}F = R^{n,k}F$ genau dann, wenn $F \in \tilde{G}^{n,k}$ ist und $\varphi F^{(j)} = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ eintrifft.

Wegen $R^{n,k,k} = R^{n,k}$ gilt weiter

Folgerung 9.6.7

Für jedes $F \in \tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I})$ ist $R^{n,k}F = R^{n,k,k}F$ minimales Element der geordneten Menge $\langle \{R^{n,1,k}F,..,R^{n,k,k}F\}, \leq \rangle$.

Bemerkung 9.6.8

Wir haben gezeigt, daß die Approximationen $R^{n,j,k}$ für $\tilde{C}^{n,k}$ die Menge $\tilde{C}^{n,k}$ in sich selbst abbilden für jedes $j < k$. Weiter sind alle diese Einschließungen optimal (vgl. 9.6.3). Trotzdem wird durch die $R^{n,j,k}$ mit $j < k$ keine Verbesserung der Einschließungsaussagen von 9.3 erzielt, insbesondere auch nicht für die $F \in \tilde{C}^{n,k} \setminus \tilde{G}^{n,k}$. Der Grund hierfür liegt z.T. darin, daß für $j < k$ $R^{n,k}F$ von höherer Ordnung mit F in x_o übereinstimmt als $R^{n,j,k}F$, d.h.: Während $(R^{n,k}F)^{(s)}(x_o) = F^{(s)}(x_o)$ für alle $s \in \{o,..,k-1\}$ zutrifft, gilt $(R^{n,j,k}F)^{(s)}(x_o) = F^{(s)}(x_o)$ lediglich für $s \in \{o,..,j-1\}$.

Als nächstes sollen die $R^{n,j,k}$ für $j > k$ genauer untersucht werden. Wir hatten schon festgestellt, daß diese Approximationen keine Abbildungen von $\tilde{C}^{n,k}$ in sich vermitteln. Aus diesem Grunde waren auch keine Optimalitätsausagen möglich. Trotzdem sind jetzt Verbesserungen der $R^{n,k}$ möglich. Es gilt

Satz 9.6.9

Sei $F \in \tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I}) \setminus \tilde{G}^{n,k}(M, \mathbb{I})$ und sei $j > k$, dann folgt:

(1) Es kann nicht gelten $R^{n,k}F \leq R^{n,j,k}F$.

(2) Es ist $R^{n,j,k}F \leq R^{n,k}F$ genau dann, wenn für alle $x \in M$

$$h \frac{\varphi F^{(k+1)}(x_o)}{k+1} + .. + h^{j-k} \frac{\varphi F^{(j)}(M)}{(k+1)..j} \subset (\varphi F^{(k)}(M) - \varphi F^{(k)}(x_o))$$

ist mit $h = (x - x_o)$.

Beweis. (1) Angenommen, es gilt $R^{n,k}F \leq R^{n,j,k}F$. Mit bekannten Methoden erhält man dann folgende Inklusion

$$(\varphi F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2) - [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2$$
$$\subset h \frac{\varphi F^{(k+1)}(x_o)}{k+1} + .. + h^{j-k} \frac{\varphi F^{(j)}(M)}{(k+1)..j}$$

mit $h = (x - x_o)$, $x \in M$. Daraus folgt insbesondere für $x = x_o$

$$(\varphi F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2) - [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 = \dot{0}$$

Nun gilt für Intervalle $A, B \in \mathbb{I}$ mit $\lambda B \leq \lambda A$ $(A \dot{+} B) - B = A$.
Also folgt $\varphi F^{(k)}(M) = \dot{0}$, was wiederum $\lambda(\varphi F^{(k)}(M)) = 0$ nach sich zieht.
Schließlich erhält man $F \in \tilde{G}^{n,k}$, und das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

(2) Es gelte $R^{n,j,k}F \leq R^{n,k}F$. Nach Definition von $R^{n,j,k}F$ erhält man daraus

$$h \frac{\varphi F^{(k+1)}(x_o)}{k+1} + .. + h^{j-k} \frac{\varphi F^{(j)}(M)}{(k+1)..j} \subset (\varphi F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2)$$
$$-(\,[-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(k)}(x_o)) \quad \text{für } x \in M \text{ und } h = (x - x_o).$$

Nun ist $(A \dot{+} B) - (B \dot{+} c) = A - c$ für $A, B \in \mathbb{I}$ mit $\lambda B \leq \lambda A$ und $c \in \mathbb{R}$.
Also folgt die Behauptung.
Die Umkehr von (2) geht analog.

In Analogie zu Satz 9.6.5 erhält man

Satz 9.6.10

Sei $F \in \tilde{G}^{n,k}(M, \mathbb{I})$ und $j > k$, dann gilt:

(1) Falls $R^{n,k}F \leq R^{n,j,k}F$ ist, so folgt $R^{n,k}F = R^{n,j,k}F$.

(2) Es ist $R^{n,j,k}F \leq R^{n,k}F$ genau dann, wenn

$$h \frac{\varphi F^{(k+1)}(x_o)}{k+1} + .. + h^{j-k} \frac{\varphi_F{}^{(j)}(M)}{(k+1)..j} \subset (\varphi F^{(k)}(M) - \varphi F^{(k)}(x_o))$$

ist für alle $x \in M$, wobei $h = (x-x_o)$ ist.

Folgerung 9.6.11

Für $F \in \tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I})$ und $j > k$ ist $R^{n,k}F = R^{n,j,k}F$ genau dann, falls $F \in \tilde{G}^{n,k}(M, \mathbb{I})$ ist und $\varphi F^{(k)} = \dot{c}$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Folgerung 9.6.12

Für jedes $F \in \tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I})$ ist $R^{n,k}F = R^{n,k,k}F$ maximales Element der geordneten Menge $\langle \{R^{n,k,k}F, .., R^{n,n,k}F\}, \leq \rangle$.

Bemerkung 9.6.13

Ein Vergleich der Aussagen über die $R^{n,j,k}$ für $j < k$ bzw. für $j > k$ zeigt, daß jeweils duale Aussagen gelten. Insbesondere sind die Einschließungsergebnisse der $R^{n,j,k}$ nicht verbesserbar durch die $R^{n,k}$ (auch nicht für $F \in \tilde{G}^{n,k}$). Ein Grund dafür ist der folgende: Für $j > k$ stimmen $R^{n,j,k}F$ und $R^{n,k}F$ bis zur Ordnung (k-1) mit F in x_o überein. Darüberhinaus stimmen φF und $\varphi(R^{n,j,k}F)$ bis zur Ordnung (j-1) in x_o überein, während dies für φF und $\varphi(R^{n,k}F)$ nur bis zur Ordnung (k-1) zutrifft. Als drittes kommt hinzu, daß die Operation $\dot{+}$ bei $R^{n,j,k}F$ i.a. eine stärkere Verschmälerung bewirkt als bei $R^{n,k}F$, falls $F \in \tilde{G}^{n,k}$ ist. Denn es gilt $([-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(k)}(x_o)) \supset ([-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(k)}(M))$, und für Intervalle $A, B, C \in \mathbb{I}$ mit $\lambda B \leq \lambda A$ und $C \subset B$ gilt $A \dot{+} B \subset A \dot{+} C$.

Es sollen einige Beispiele betrachtet werden.

Beispiel 9.6.14

Sei $M = [-1,0]$, $x_o = -1$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [x^3, e^x]$ und $n = 3$.
Dann ist $F \in C^{3,1} \setminus \tilde{G}^{3,1}$. Es soll überprüft werden, ob man die Einschließung $R^{3,1}F$ verbessern kann durch $R^{3,3,1}F$. Nach 9.6.9 ist dies gleichwertig damit, daß für alle $x \in M$ $(x-x_o)\varphi F''(x_o)/2 + (x-x_o)^2 \varphi F'''(M)/2 \cdot 3 \subset \varphi F'(M) - \varphi F'(x_o)$ gilt.
Es ist $\varphi F''(x_o) = -3+(1/2e)$, $\varphi F'''(M) = [3+(1/2e), 3+(1/2)]$ und $\varphi F'(M) - \varphi F'(x_o) = [-1-(1/2e), 0]$. Man rechnet nun leicht nach, daß obige

Inklusion für alle $x \in M$ erfüllt ist, d.h. es gilt $R^{3,3,1}_F \leq R^{3,1}_F$.
Es soll als nächstes überprüft werden, ob $R^{3,2,1}_F \leq R^{3,1}_F$ gilt.
Wegen 9.6.5 ist dies genau dann der Fall, wenn

$$(x-x_o)\,\varphi F''(M)/2 \subset \varphi F'(M) - \varphi F'(x_o)$$

gilt für alle $x \in M$. Es ist $\varphi F''(M) = [-3 + (1/2e), 1/2]$. Wegen $\varphi F'(M) - \varphi F'(x_o) = [-1 - (1/2e), o]$ gilt daher obige Inklusion nicht für alle $x \in M$, d.h. $R^{3,2,1}_F$ und $R^{3,1}_F$ sind unvergleichbar.

Beispiel 9.6.15

Sei $M = [1/2,1]$, $x_o = 1/2$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [x,1/x]$ und $n \geq 3$.
Dann ist $F \in \tilde{C}^{n,1}$. Wegen $\varphi F'(M) = [-3/2, o]$ und $\min_M \lambda F'(x) = 2$ gilt auch $F \in \tilde{G}^{n,1}$.
Es soll überprüft werden, ob man $R^{n,1}_F$ durch $R^{n,3,1}_F$ verbessern kann.
Nach 9.6.1o ist dies genau dann möglich, wenn für alle $x \in M$ folgende Inklusion gilt

$$(x-x_o)\,\frac{\varphi F''(x_o)}{2} + (x-x_o)^2\,\frac{\varphi F'''(M)}{2\cdot 3} \subset \varphi F'(M) - \varphi F'(x_o).$$

Nun ist $\varphi F'(M) - \varphi F'(x_o) = [o, 3/2]$, $\varphi F''(x_o) = 8$ und $\varphi F'''(M) = [-48, -3]$.
Man weist nun leicht nach, daß dann obige Inklusion nicht für alle $x \in M$ erfüllt ist (man nehme z.B. $x = 1$).
Wegen 9.6.1o sind also $R^{n,3,1}_F$ und $R^{n,1}_F$ unvergleichbar bzgl. der Ordnung $\leq$.

Analog zeigt man, daß auch der Fall $R^{n,2,1}_F \leq R^{n,1}_F$ nicht eintreten kann.
Denn wegen $\varphi F''(M) = [1,8]$ und $\varphi F'(M) - \varphi F'(x_o) = [o, 3/2]$ kann nicht für alle $x \in M$ gelten

$$(x-x_o)\,\varphi F''(M)/2 \subset \varphi F'(M) - \varphi F'(x_o),$$

d.h. auch $R^{n,2,1}_F$ und $R^{n,1}_F$ sind unvergleichbar.

Beispiel 9.6.16

Sei $M = [-1,o]$, $x_o = o$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [x, e^x]$ und $n = 3$.
Wegen $(\lambda F)''' > o$ und $x_o = b$ folgt dann $F \in \tilde{C}^{3,3}$. Es ist weiter $\varphi F'''(M) = [1/2e, 1/2]$ und daher $\lambda(\varphi F'''(M)) = 1/2 - 1/2e < \min_M \lambda F'''(x) = 1/e$. Also ist auch $F \in \tilde{G}^{3,3}$.
Wegen 9.6.5 und 9.6.6 kann nicht gelten $R^{3,j,3}_F \leq R^{3,3}_F$ für $j = 1,2$.
Es soll überprüft werden, ob $R^{3,3}_F$ bessere Einschließungsergebnisse liefert als die $R^{3,j,3}_F$ für $j = 1,2$.

Wegen 9.6.5 ist $R^{3,3}F \leq R^{3,2,3}F$ genau dann, wenn gilt

$$(x-x_o)\frac{\varphi F'''(M)}{3} \subset \varphi F''(M) - \varphi F''(x_o) \text{ für alle } x \in M.$$

Es ist $\varphi F''(M) - \varphi F''(x_o) = [-(1/2)+(1/2e),o]$. Damit ist obige Inklusion gleichwertig mit

$$(x-x_o)\,[1/6e,1/6] \subset [-(1/2)+(1/2e),o] \text{ für alle } x \in M,$$

und das gilt für alle x, wie man leicht nachrechnet. Also führt $R^{3,3}F$ hier zu einer besseren Einschließung.

Wieder wegen 9.6.5 ist $R^{3,3}F \leq R^{3,1,3}F$ gleichwertig mit

$$(x-x_o)\,\frac{\varphi F''(x_o)}{2} + (x-x_o)^2\,\frac{\varphi F'''(M)}{2\cdot 3} \subset \varphi F'(M) - \varphi F'(x_o) \text{ für alle } x \in M.$$

Es ist $\varphi F''(x_o) = 1/2$ und $\varphi F'(M) - \varphi F'(x_o) = [-(1/2) + (1/2e),o]$.
Man weist nun leicht nach, daß obige Inklusion für alle $x \in M$ erfüllt ist.
Also folgt $R^{3,3}F \leq R^{3,1,3}F$. Insgesamt wurde gezeigt, daß $R^{3,3}F$ kleinstes Element von $\langle \{R^{3,j,3}F \mid j = 1,2,3\}, \leq \rangle$ ist.

Bemerkung 9.6.13 läßt die Richtigkeit der folgenden Aussage vermuten

Satz 9.6.17

Für jedes $F \in \tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I})$ ist $R^{n,n,k}F$ minimales Element der geordneten Menge $\langle \{R^{n,1,k}F,..,R^{n,n,k}F\}, \leq \rangle$.

Beweis. Sei etwa $F \in \tilde{G}^{n,k}$. Es gelte $R^{n,j,k}F \leq R^{n,n,k}F$ für $j \in \{1,..,n-1\}$.
Falls $j = k$ ist, so folgt mit 9.6.1o sofort die Gleichheit.
Für $j \neq k$ erhält mit bekannten Argumenten $\varphi F^{(j)}(M) = \varphi F^{(j)}(x_o)$ und daraus dann $R^{n,j,k}F = R^{n,n,k}F$. Also ist $R^{n,n,k}F$ minimales Element.

Mit Hilfe des folgenden einfach aufgebauten Kriteriums kann man nachprüfen, ob $R^{n,n,k}F$ auch kleinstes Element ist

Satz 9.6.18

Sei $F \in \tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I})$. Dann ist $R^{n,n,k}F$ genau dann kleinstes Element von $\langle \{R^{n,1,k}F,..,R^{n,n,k}F\}, \leq \rangle$, wenn für alle $j \in \{1,..,n-1\}$ gilt

$$(x-x_o)\,\frac{\varphi F^{(j+1)}(x_o)}{j+1} + ..+ (x-x_o)^{n-j}\,\frac{\varphi F^{(n)}(M)}{(j+1)..n} \subset \varphi F^{(j)}(M) - \varphi F^{(j)}(x_o)$$

für alle $x \in M$.

Beweis. Der Beweis erfolgt mit schon mehrfach benutzten Argumenten. Auf eine Durchführung soll daher verzichtet werden.

Wir stellen abschließend fest, daß man mit Hilfe der Intervallzerlegung zwar Approximationen $R^{n,j,k}$ für die Klasse $\tilde{C}^{n,k}$ konstruieren kann, die für $j < k$ $\tilde{C}^{n,k}$ wieder in sich abbilden, und die auch optimal sind. Andererseits aber erzielt man mit diesen Approximationen keine besseren Einschließungen als mit $R^{n,k}$ (vergl. die Sätze 9.6.4 und 9.6.5). Insbesondere sind damit die nicht immer zufriedenstellenden Einschließungen $R^{n,k}F$ für $F \in \tilde{C}^{n,k} \setminus \tilde{G}^{n,k}$ nicht verbesserbar durch die $R^{n,j,k}$ für $j < k$.

Für $j > k$ sind die Verhältnisse umgekehrt. In diesem Fall bilden die $R^{n,j,k}$ weder die Klassen $\tilde{C}^{n,k}$ in sich ab noch kann man nachweisen, daß Optimalität vorliegt. Andererseits sind aber die durch die $R^{n,j,k}$ erzielten Einschließungen nicht durch $R^{n,k}$ verbesserbar.
Sucht man Verbesserungen der durch $R^{n,k}$ erzielten Einschließungen, so hat man diese also unter den gegebenen Voraussetzungen unter den $R^{n,j,k}$ mit $j > k$ zu suchen. Allerdings gilt dann auch nicht immer $R^{n,j,k}F \subseteq R^{n,k}F$, die Gültigkeit dieser Beziehung muß von Fall zu Fall nachgeprüft werden.

1o Minimalitätsbetrachtungen für die Einschließungsoperatoren der Form $R^{n,j}_{K^n_F}F$, $F \in \tilde{C}^n$ und $j \in M^n_F$

1o.1 Überblick

Für gegebenes $F \in \tilde{C}^n$ stehen i.a. verschiedene Einschließungen zur Verfügung. Sei $M^n_F = \{j \in \{1,..,n\} / F \in \tilde{C}^{n,j}\}$.
Dann können die folgenden Möglichkeiten eintreten:
1) Es ist $M^n_F = \emptyset = K^n_F$, und in diesem Fall stehen für F nur die gewöhnlichen Taylor-Einschließungen $T^{n,k}F$, $k = 1,..,n$, zur Verfügung.
2) Es ist $K^n_F \neq \emptyset = M^n_F$. Dann stehen als Einschließung für F die $T^{n,k}F$ und die $T^{n,k}_{K^k_F}F$, $k = 1,..,n$, zur Verfügung.
3) Es ist $M^n_F \neq \emptyset = K^n_F$, und dann kann man zwischen den Einschließungen der Form $T^{n,k}F$, $k = 1,..,n$, bzw. $R^{n,j}F$, $j \in M^n_F$, für F wählen.
4) Es ist $M^n_F \neq \emptyset \neq K^n_F$. In diesem Falle stehen für F alle der in der vorliegenden Arbeit konstruierten Einschließungen zur Verfügung.

Die jeweiligen Optimalitätsaussagen für die vorliegenden Approximationen (vgl. die Paragraphen 5,7 und 9) geben keine Auskunft darüber, welche unter den für F möglichen Einschließungen die beste Einschließungsschärfe bzgl. $\leq$ bietet.
Diese Fragestellung soll im abschließenden Paragraphen 1o behandelt werden. Es wird für die in Frage kommenden Fälle jeweils ein Algorithmus konstruiert, der unter den möglichen Einschließungen für F ein minimales Element bzgl. $\leq$ liefert.
Von den vier eingangs erwähnten Fragestellungen wurden die beiden ersten bereits abgehandelt (vgl. § 6 und § 8). Die Lösung der gestellten Aufgabe für die beiden übrigen Fälle erfolgt in mehreren Schritten.

In § 1o.2 wird zunächst untersucht, wie sich die Einschließungsgüte von $R^{n,j}F$ mit wechselndem $j \in M^n_F$ ändert ($|M^n_F| \geq 2$). Für $F \in \tilde{G}^{n,k} \cap \tilde{C}^{n,j}$, $k < j$, erhält man übersichtliche Kriterien, für $F \in (\tilde{C}^{n,k} \setminus \tilde{G}^{n,k}) \cap \tilde{C}^{n,j}$ ist das Gegenteil der Fall.
In § 1o.3 wird mit Hilfe der Aussagen von § 1o.2 ein Algorithmus angegeben, der für jedes $F \in \tilde{C}^n$ mit $M^n_F \neq \emptyset$ ein minimales Element von $\langle \{R^{n,j}F / j \in M^n_F\}, \leq \rangle$ angibt.
In § 1o.4 wird dann Fragestellung 3) gelöst, d.h. für $F \in \tilde{C}^n$ mit $M^n_F \neq \emptyset = K^n_F$ werden die Approximationen der Form $T^{n,k}F$, $k \in \{1,..,n\}$, und $R^{n,j}F$, $j \in M^n_F$, miteinander verglichen bzgl. der Ordnung $\leq$, und es wird ein Algorithmus zum Auffinden eines minimalen Elements von $\langle \{T^{n,k}F / k \in \{1,..,n\}\} \cup \{R^{n,j}F / j \in M^n_F\}, \leq \rangle$ angegeben.

In den Abschnitten 1o.5, 1o.6 und 1o.7 wird der eingangs formulierte Fall 4) behandelt.

In § 1o.5 werden zunächst für $F \in \widetilde{C}^n$ mit $K_F^n \neq \emptyset \neq M_F^n$ Einschließungen der Form $T_{K_F^k}^{n,k}F$, $k \in \{1,..,n\}$, und $R_{K_F^j}^{n,j}F$, $j \in M_F^n$, miteinander verglichen bzgl. der Ordnung $\leq$.

In 1o.6 wird für $F \in \widetilde{C}^n$ mit $|M_F^n| \geq 2$ untersucht, wie sich die Einschließungsgüte von $R_{K_F^j}^{n,j}F$ bei wechselndem $j \in M_F^n$ ändert. Anschließend wird ein Algorithmus konstruiert, der für jedes solche F ein minimales Element von $\langle \{R_{K_F^j}^{n,j}F \;/\; j \in M_F^n\}, \leq \rangle$ angibt.

In § 1o.7 wird dann schließlich ein Algorithmus konstruiert, durch den das eingangs formulierte Problem 4) befriedigend beantwortet wird.

Für die Definitionsbereiche der in § 1o zugrunde liegenden Klassen von I-Funktionen, die stets mit M bezeichnet werden, gelte $M = [a,b] \in \mathbb{I}$.
Weiterhin sei stets x_o ein beliebiger, fester Punkt aus M.

Vereinbarung: Zur Wahrung der Übersichtlichkeit wird in § 1o statt $T_{K_F}^{n,k}F$ bzw. statt $R_{K_F^j}^{n,j}F$ einfach $T_{K^k}^{n,k}F$ bzw. $R_{K^j}^{n,j}F$ geschrieben.

1o.2 Ein Vergleich zwischen den $R^{n,j}F$ verschiedener Ordnung

Es soll untersucht werden, wann zwei Approximationen $R^{n,k}F$ und $R^{n,j}F$ für $F \in \tilde{C}^{n,k} \cap \tilde{C}^{n,j}$, wobei $k < j$ ist, vergleichbar sind bzgl. der Ordnung $\leq$ für I-Funktionen.
Bisher hatte man bei Untersuchungen dieser Art immer überschaubare Kriterien erhalten, insbesondere konnte man auch immer ein minimales Element unter den betrachteten endlich vielen Approximationen für ein gegebenes F angeben (vergl. §6 und §8). Dies ist zwar für die $R^{n,j}F$ auch möglich, allerdings sind die Kriterien unübersichtlich. Ein Grund hierfür liegt darin, daß man für $F \in \tilde{C}^{n,j}$ stets die Fälle $F \in \tilde{G}^{n,j}$ und $F \in \tilde{C}^{n,j} \setminus \tilde{G}^{n,j}$ unterscheiden muß.

Es soll zunächst untersucht werden, welches Ordnungsverhalten die Approximationen $R^{n,k}F$ und $R^{n,j}F$ für $F \in \tilde{G}^{n,k} \cap \tilde{C}^{n,j}$ haben. Wir werden zeigen, daß bis auf eine genau charakterisierbare Ausnahmemenge $R^{n,k}F$ hier die günstigere Einschließung für F bietet.

Satz 1o.2.1
Seien $k,j \in \{1,..,n\}$ mit $k < j$, und sei $F \in \tilde{G}^{n,k}(M, \mathbb{I}) \cap \tilde{G}^{n,j}(M, \mathbb{I})$, dann folgt:

(1) Es ist $R^{n,j}F \leq R^{n,k}F$ genau dann, wenn $k,(k+1),..,(j-1) \notin K_F^n$ sind.

(2) Es ist $R^{n,k}F \leq R^{n,j}F$ genau dann, wenn folgende Inklusion

$$-(x-x_o)^{j-k}\ \frac{[-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dotplus \varphi F^{(j)}(M)}{(k+1)..\ ..j} \subset$$

$$(F^{(k)}(x_o) - ([-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dotplus \varphi F^{(k)}(M)) + (\sum_{i=k}^{j-1} (x-x_o)^{i-k}\ \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!})$$

für alle $x \in M$ gültig ist.

Beweis. (1) Es gelte $R^{n,j}F \leq R^{n,k}F$. Dann gilt für alle $x \in M$

$$F^{(k)}(x_o)+..+(x-x_o)^{j-k-1}\ \frac{F^{(j-1)}(x_o)}{(k+1)..(j-1)} - ([-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dotplus \varphi F^{(k)}(M)) \subset$$

$$-(x-x_o)^{j-k}\ \frac{[-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dotplus \varphi F^{(j)}(M)}{(k+1)..\ ..\ ..j}$$

Es folgt $F^{(k)}(x_o) - ([-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dotplus \varphi F^{(k)}(M)) = \underset{\cdot}{0}$. Also existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F^{(k)}(x_o) = [-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dotplus \varphi F^{(k)}(M) = \underset{\cdot}{c}$.
Damit ist $\lambda F^{(k)}(x_o) = 0$ und damit $\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 = 0 = \lambda(\varphi F^{(k)}(M))$.
Nach Definition von K_F^n folgt daraus $k \notin K_F^n$.
Aus obiger Inklusion folgt nun sukzessive $F^{(k+1)}(x_o) = .. = F^{(j-1)}(x_o) = \underset{\cdot}{0}$ und damit auch $(k+1),..,(j-1) \notin K_F^n$.

Es sei umgekehrt $k,(k+1),..,(j-1) \notin K_F^n$. Wegen $F \in \tilde{C}^{n,k}$ folgt daraus nach 9.2.7 $\lambda F^{(k)}(x_o) = o$. Also ist insbesondere $\min_M \lambda F^{(k)}(x) = o$ und damit wegen $F \in \tilde{G}^{n,k}$ auch $\lambda(\varphi F^{(k)}(M)) = 0$. Somit ist insbesondere $F^{(k)}(x_o) = [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(k)}(M)$.

Aus $F \in \tilde{C}^{n,k}$ und $k \notin K_F^n$ folgt nach 9.2.1o weiter $F \in \tilde{C}^{n,k+1}$. Nach Voraussetzung ist aber $(k+1) \notin K_F^n$, also ist wieder nach 9.2.7 $\lambda F^{(k+1)}(x_o) = o$. Wegen $\varphi F^{(k+1)} = \varrho$ ist also $F^{(k+1)}(x_o) = \varrho$. Durch sukzessives Anwenden erhält man schließlich $F^{(k+1)}(x_o) = F^{(k+2)}(x_o) = .. = F^{(j-1)}(x_o) = \varrho$.

Insgesamt erhält man damit für alle $x \in M$ wegen $\varrho \subset [-1,1]\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$F^{(k)}(x_o) + (x-x_o)\frac{F^{(k+1)}(x_o)}{k+1} + .. + (x-x_o)^{j-k-1}\frac{F^{(j-1)}(x_o)}{(k+1)..(j-1)}$$

$$-([-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(k)}(M)) \subset -(x-x_o)^{j-k}\frac{[-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x) \dot{+} \varphi F^{(j)}(M)}{(k+1)..\ ..\ ..j}.$$

Mit einigen schon mehrfach benutzten Argumenten folgt dann $R^{n,j}F \in F^{n,k}F$, d.h. es gilt die Behauptung.

Den Beweis von (2) erhält man durch einige schon mehrfach verwandte Argumente.

Das folgende Beispiel zeigt, daß (1) aus 1o.2.1 auch wirklich eintreten kann:

Beispiel 1o.2.2

Sei $M = [a,b] \in \mathbb{I}$, und seien $A,B \in \mathbb{I}$ mit $\lambda A \geq |x-x_o|^2 \cdot \lambda B$ für ein festes $x_o \in M$ und für alle $x \in M$. Weiter sei $\varphi(B) = o$, $a \in \mathbb{R}$ beliebig und $n=2$. Durch $x \mapsto (A + (x-x_o)a) \dot{+} (x-x_o)^2 B$, $x \in M$, wird dann eine I-Funktion F definiert mit $F \in \tilde{G}^{2,1}$ und $F \in \tilde{G}^{2,2}$. Denn wegen $\varphi B = o$ ist $\lambda(\varphi F'(M)) = \lambda(\varphi F''(M)) = o$.

Es ist $\lambda F'(x_o) = o$ und daher $1 \notin K_F^2$. Nach 1o.2.1 gilt also $R^{2,2}F \in R^{2,1}F$. Man zeigt leicht, daß für dieses F $R^{2,2}F = F$ ist.

Dem Beweis zu 1o.2.1 entnimmt man weiter die

Folgerung 1o.2.3

Sei $F \in \tilde{G}^{n,k}(M,\mathbb{I}) \cap \tilde{G}^{n,j}(M,\mathbb{I})$ für $k,j \in \{1,..,n\}$ mit $k < j$. Falls dann $k,..,(j-1) \notin K_F^n$ ist, d.h. also, falls $R^{n,j}F \in R^{n,k}F$ ist, dann gilt

$$R^{n,j}F(x) = R^{n,k}F(x) \dot{+} (x-x_o)^j([-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2)/j!$$

für alle $x \in M$.

Aus 1o.2.3 folgt unmittelbar

Folgerung 1o.2.4

Sei $F \in \tilde{G}^{n,k}(M, \mathbb{I}) \cap \tilde{G}^{n,j}(M, \mathbb{I})$ für $k < j$ aus $\{1,..,n\}$. Dann tritt genau dann die Gleichheit $R^{n,j}F = R^{n,k}F$ ein, wenn $k, (k+1), .., (j-1) \notin K_F^n$ ist und $\min_M \lambda F^{(j)}(x) = o$.

Beispiel 1o.2.5

Sei $M = [1,2]$, $x_o = 1$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \to [-1,1]\, 1/x$ und $n = 3$.
Dann ist $F \in \tilde{G}^{3,1} \cap \tilde{G}^{3,3}$, und es soll geprüft werden, ob $R^{3,1}F$ und $R^{3,3}F$ vergleichbar sind.
Es ist $(\lambda F)'(x_o) \neq o$ und daher $1 \in K_F^3$ nach 9.2.7 wegen $F \in \tilde{C}^{3,1}$. Nach 1o.2.1, (1) kann daher nicht $R^{3,3}F \leq R^{3,1}F$ gelten.
Nach 1o.2.1 ist $R^{3,1}F \leq R^{3,3}F$ genau dann, wenn für alle $x \in M$ die Inklusion von 1o.2.1,(2), erfüllt ist.
Nun ist $\Upsilon F'(M) = \Upsilon F'''(M) = \underset{\circ}{0}$, $\min_M \lambda F'(x) = 1/2$ und $\min_M \lambda F'''(x) = 3/4$.

Setzt man diese Werte in 1o.2.1,(2) ein, so hat man also nachzuprüfen, ob folgende Inklusion für $x \in M$ richtig ist

$$(x-1)^2 \frac{[-1,1]\, 3/8}{2 \cdot 3} \subset ([-1,1] - [-1,1]\, 1/4) + (x-1) \frac{[-2,2]}{2} .$$

Deren Richtigkeit ist aber nun leicht nachweisbar, und somit ist $R^{3,1}F \leq R^{3,3}F$, und es tritt keine Gleichheit ein.

Für $F \in \tilde{G}^{n,k} \cap (\tilde{C}^{n,j} \setminus \tilde{G}^{n,j})$ erhält man angenehmere Kriterien über die Vergleichbarkeit der Approximationen $R^{n,k}F$ und $R^{n,j}F$.

Satz 1o.2.6

Sei $F \in \tilde{G}^{n,k}(M, \mathbb{I}) \cap (\tilde{C}^{n,j}(M, \mathbb{I}) \setminus \tilde{G}^{n,j}(M, \mathbb{I}))$, dann folgt:

(1) Es kann nicht gelten $R^{n,j}F \leq R^{n,k}F$.

(2) Es ist $R^{n,k}F \leq R^{n,j}F$ genau dann, wenn für alle $x \in M$ der Durchschnitt

$$\left(-\left(F^{(k)}(x_o) - \left([-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dotplus F^{(k)}(M)\right)\right) \cap \right.$$
$$\left. \left(\sum_{i=k+1}^{j-1} (x-x_o)^{i-k} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!} + (x-x_o)^{j-k} \frac{\Upsilon F^{(j)}(M) \dotplus [-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2}{(k+1)\,..\,..\,..\,j}\right)\right.$$

nicht leer ist.

Beweis. (1) Angenommen, es ist $R^{n,j}F \leq R^{n,k}F$. Mit bekannten Schritten erhält man daraus $F^{(k)}(x_o) - [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dotplus \Upsilon F^{(k)}(M) = \underset{\circ}{0}$
und daraus die Inklusion

$$F^{(k+1)}(x_o)+(x-x_o)\,\frac{F^{(k+2)}(x_o)}{k+2}+\ldots+(x-x_o)^{j-k-2}\,\frac{F^{(j-1)}(x_o)}{(k+2)\ldots(j-1)}$$

$$+(x-x_o)^{j-k-1}\,\frac{[-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j)}(M)}{(k+2)\ldots\ldots j} \subset \dot{0} \quad \text{für } x\in M.$$

Daraus erhält man schließlich $\varphi F^{(j)}(M) \dot{+} [-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 = \dot{0}$.
Also muß auch $F\in \tilde{G}^{n,j}$ gelten. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung.

(2) Der Beweis von (2) ist klar, wenn man noch die Gültigkeit folgender Aussage für Intervalle $A,B\in\mathbb{I}$ beachtet: Es ist $\dot{0}\subset A+B$ genau dann, wenn $(-A)\cap B\neq\emptyset$ ist.

Für $F\in \tilde{G}^{n,k}\cap \tilde{C}^{n,j}$ läßt sich also abschließend sagen, daß (bis auf eine schon sehr spezielle Teilklasse von $\tilde{G}^{n,k}\cap \tilde{G}^{n,j}$) $R^{n,k}F$ der Approximation $R^{n,j}F$ vorzuziehen ist.

Als nächstes soll der Fall $F\in (\tilde{C}^{n,k}\setminus \tilde{G}^{n,k})\cap \tilde{C}^{n,j}$ behandelt werden. Hier liegen keine so klaren Verhältnisse mehr vor wie in dem eben behandelten Fall. Wir werden zeigen, daß jetzt für das Ordnungsverhalten von $R^{n,k}F$ und $R^{n,j}F$ entscheidend eingeht, ob eine der folgenden Beziehungen $F^{(k)}(x_o) * (\varphi F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2)$, wobei $*\in\{\subset,\supset,=\}$ ist, erfüllt ist. Für den Fall, daß hier Gleichheit eintritt, erhält man zu 1o.2.1 bzw. zu 1o.2.6 analoge Aussagen. Es gilt

Satz 1o.2.7
Sei $F\in (\tilde{C}^{n,k}(M,\mathbb{I})\setminus \tilde{G}^{n,k}(M,\mathbb{I}))\cap \tilde{G}^{n,j}(M,\mathbb{I})$, und es gelte $F^{(k)}(x_o) = \varphi F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2$. Dann folgt:

(1) Es ist $R^{n,j}F \leq R^{n,k}F$ genau dann, wenn

(a) $F^{(i)}(x_o) = \dot{0}$ ist für alle $i = k+1,k+2,..,j-1$ und

(b) $\varphi F^{(j)}(M) \subset [-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)$.

(2) Es ist $R^{n,k}F \leq R^{n,j}F$ genau dann, wenn für alle $x\in M$ gilt

$$-(x-x_o)^{j-k}\,\frac{[-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j)}(M)}{} \subset$$

$$\sum_{i=k+1}^{j-1}(x-x_o)^{i-k-1}\,\frac{(k+1)!F^{(i)}(x_o)}{i!}.$$

Beweis. (1) Es gelte $R^{n,j}F \leq R^{n,k}F$. Daraus folgt mit schon mehrfach benutzten Argumenten

$$\sum_{i=k+1}^{j-1}(x-x_o)^{i-k}\,\frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!} \subset -(x-x_o)^{j-k}\,\frac{[-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j)}(M)}{(k+1)\ldots\ldots j}$$

für alle $x\in M$. Daraus erhält man sukzessive

$F^{(k+1)}(x_o) = .. = F^{(j-1)}(x_o) = \underset{\cdot}{0}$ und $\underset{\cdot}{0} \subset [-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j)}(M)$.
Nun gilt für Intervalle $A,B \in \mathbb{I}$ mit $\lambda B \leq \lambda A$: Es ist $0 \subset A \dot{+} B$ genau dann, wenn $B \subset -A$ gilt. Daraus folgt dann Teil (b) von (1).
Die andere Richtung des Beweises geht ähnlich.
Der Beweis von (2) ist klar.

Dem Beweis von 1o.2.7 entnimmt man die

Folgerung 1o.2.8

Unter den Voraussetzungen von 1o.2.7 gilt: Falls $R^{n,j}F \leq R^{n,k}F$ ist, dann läßt sich $R^{n,j}F$ in der Form

$$R^{n,j}F(x) = R^{n,k}F(x) \dot{+} (x-x_o)^j \frac{[-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j)}(M)}{j!},$$

$x \in M$, schreiben.

Aus 1o.2.8 folgt unmittelbar wegen $A \dot{+} A = \underset{\cdot}{0}$ für Intervalle $A \in \mathbb{I}$ mit $\varphi A = o$:

Folgerung 1o.2.9

Unter den Voraussetzungen von 1o.2.7 tritt genau dann die Gleichheit $R^{n,j}F = R^{n,k}F$ ein, wenn

(a) $F^{(i)}(x_o) = \underset{\cdot}{0}$ für $i = k+1,k+2,..,j-1$ ist und

(b) $\varphi F^{(j)}(M) = [-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2$ gilt.

Satz 1o.2.1o

Sei $F \in (\hat{C}^{n,k}(M, \mathbb{I}) \setminus \tilde{G}^{n,k}(M, \mathbb{I})) \cap \tilde{G}^{n,j}(M, \mathbb{I})$, und es gelte $F^{(k)}(x_o) \neq \varphi F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2$. Dann folgt

(1) Es gilt $R^{n,j}F \leq R^{n,k}F$ genau dann, wenn

(a) $F^{(k)}(x_o) \subset (\varphi F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2)$ ist und

(b) für alle $x \in M$ folgende Inklusion gilt ($h = (x-x_o)$!)

$$\sum_{i=k+1}^{j-1} h^{i-k} \frac{k! F^{(i)}(x_o)}{i!} \subset ((\varphi F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2) \ominus F^{(k)}(x_o))$$
$$- h^{j-k} \frac{[-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j)}(M)}{(k+1).. .. .. j}$$

(2) Es ist $R^{n,k}F \leq R^{n,j}F$ genau dann, wenn

(a) $(\varphi F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2) \subset F^{(k)}(x_o)$ ist und

(b) für alle $x \in M$ folgende Inklusion gilt ($h = (x-x_o)$!)

$$- h^{j-k} \frac{[-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j)}(M)}{(k+1).. .. .. j} \subset (\sum_{i=k+1}^{j-1} h^{i-k} \frac{F^{(i)}(x_o)\ k!}{i!}$$
$$+ (F^{(k)}(x_o) \ominus (\varphi F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2)).$$

Beweis. (1) Es gelte $R^{n,j}F \leq R^{n,k}F$. Mit bekannten Methoden erhält man

$$F^{(k)}(x_o)+..+h^{j-k-1}\frac{F^{(j-1)}(x_o)}{(k+1)..(j-1)} \subset (\nabla F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2)$$

$$- h^{j-k}\frac{[-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \nabla F^{(j)}(M)}{(k+1)..\ ..j} \quad , \text{ wobei } h = (x-x_o) \text{ ist für } x \in M.$$

Daraus erhält man insbesondere Teil (a) von (1).
Wegen der Isotonie von $\ominus$, d.h. für $A,B,C \in \mathbb{I}$ mit $\lambda B \leq \lambda C$ folgt aus $A+B \subset C$ stets $A \subset C \ominus B$, erhält man nun aus obiger Inklusion die Behauptung.

Es gelten umgekehrt (a) und (b) von (1). Beachtet man $A+B \subset C$ für $A,B,C \in \mathbb{I}$ mit $A \subset C \ominus B$ und $\lambda B \leq \lambda C$, so erhält man aus der Isotonie der Intervalladdition nach einigen Schritten die Behauptung $R^{n,j}F \leq R^{n,k}F$.

(2) Der Beweis von (2) verläuft ähnlich wie der zu (1).

Den Aussagen 1o.2.7 und 1o.2.1o entnimmt man unmittelbar

Folgerung 1o.2.11

Für $F \in (\tilde{C}^{n,k}(M,\mathbb{I}) \setminus \tilde{G}^{n,k}(M,\mathbb{I})) \cap \tilde{G}^{n,j}(M,\mathbb{I})$ gilt die Gleichheit $R^{n,k}F = R^{n,j}F$ genau dann, falls

(a) $F^{(k)}(x_o) = \nabla F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2$,

(b) $\nabla F^{(j)}(M) = [-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2$

(c) und $F^{(i)}(x_o) = 0$ ist für alle $i = (k+1),..,(j-1)$.

Beispiel 1o.2.12

Sei $M = [-1,0]$, $x_o = -1$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [x^3, e^x]$ und $n = 3$.
Wegen $\lambda F(x) \leq \lambda F(x_o)$ für alle $x \in M$ ist $F \in \tilde{C}^{n,1}$, und wegen $(\lambda F)''' \leq 0$ ist $F \in \tilde{C}^{n,3}$. Es ist weiter $\min_M \lambda F'(x) = 0$ und $\nabla F'(M) = [1/2, (3/2)+(1/2e)]$.
Also folgt $F \notin \tilde{G}^{n,1}$. Wegen $\min_M \lambda F'''(x) = 5$ und $\nabla F'''(M) = 3 \dot{+} [1/2e, 1/2]$ ist weiter $F \in \tilde{G}^{n,3}$.
Es soll untersucht werden, ob $R^{n,1}F$ und $R^{n,3}F$ vergleichbar sind.
Es ist $F'(x_o) = [1/e, 3] \supsetneq [1/2, (3/2)+(1/2e)] = \nabla F'(M) \dot{+} [-1,1]\min_M \lambda F'(x)/2$.
Also kann höchstens $R^{n,1}F \leq R^{n,3}F$ gelten wegen 1o.2.1o.
Setzt man die entsprechenden Größen in 1o.2.1o, Teil (2),(b), ein, so ist $R^{n,1}F \leq R^{n,3}F$ genau dann, wenn für alle $x \in M$ gilt

$$-(x+1)^2\,[1,(11/2)+(1/2e)]/6 \subset ([1/e,3] \ominus [1/2,(3/2)+(1/2e)]) + (x+1)\,[-3,1/2e].$$

Man rechnet nun leicht nach, daß diese Inklusion für alle $x \in M$ erfüllt ist.
Also gilt $R^{n,1}F \leq R^{n,3}F$. Wegen 1o.2.11 tritt keine Gleichheit ein.

Für $F \in (\tilde{C}^{n,k} \setminus \tilde{G}^{n,k}) \cap (\tilde{C}^{n,j} \setminus \tilde{G}^{n,j})$ müssen zwei Fälle unterschieden werden. Zunächst gilt

Satz 1o.2.13

Sei $F \in (\tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{II}) \setminus \tilde{G}^{n,k}(M, \mathbb{II})) \cap (\tilde{C}^{n,j}(M, \mathbb{II}) \setminus \tilde{G}^{n,j}(M, \mathbb{II}))$, und es gelte $F^{(k)}(x_o) = (\varphi F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x))/2$. Dann folgt

(1) Es kann nicht gelten $R^{n,j}F \leq R^{n,k}F$.

(2) Es ist $R^{n,k}F \leq R^{n,j}F$ genau dann, wenn für alle $x \in M$

$$\overset{o}{\subset} F^{(k+1)}(x_o) + (x-x_o)\frac{F^{(k+2)}(x_o)}{(k+2)} + \ldots + (x-x_o)^{j-k-2}\frac{F^{(j-1)}(x_o)}{(k+2)\ldots(j-1)} + h^{j-k-1}\frac{\varphi F^{(j)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2}{(k+2)\ldots\ldots j}$$

gilt.

Beweis. (1) Angenommen, es ist $R^{n,j}F \leq R^{n,k}F$. Wegen der Gleichheit $F^{(k)}(x_o) = \varphi F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2$ muß dann insbesondere folgen, daß für alle $x \in M$ gilt

$$(x-x_o)\frac{F^{(k+1)}(x_o)}{k+1} + (x-x_o)^2\frac{F^{(k+2)}(x_o)}{(k+1)(k+2)} + \ldots + (x-x_o)^{j-k-1}\frac{F^{(j-1)}(x_o)}{(k+1)\ldots(j-1)} + (x-x_o)^{j-k}\frac{\varphi F^{(j)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2}{(k+1)\ldots\ldots j} \overset{o}{\subset} 0.$$

Aus dieser Inklusion folgt aber nun insbesondere

$\varphi F^{(j)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \overset{o}{=} 0$ und damit $\lambda(\varphi F^{(j)}(M)) = \min \lambda F^{(j)}(x)$ nach Definition der Operation $\dot{+}$. Also gilt $F \in \tilde{G}^{n,j}$ mit Widerspruch zur Voraussetzung.

Der Beweis von (2) ist klar.

Falls die Gleichheit $F^{(k)}(x_o) = \varphi F^{(k)}(x_o) \dot{+} [-1,1] \min_M F^{(k)}(x)/2$ nicht erfüllt ist, so ist für das entsprechende F sowohl $R^{n,j}F \leq R^{n,k}F$ als auch die umgekehrte Beziehung möglich.

Satz 1o.2.14

Sei $F \in (\tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{II}) \setminus \tilde{G}^{n,k}(M, \mathbb{II})) \cap (\tilde{C}^{n,j}(M, \mathbb{II}) \setminus \tilde{G}^{n,j}(M, \mathbb{II}))$, und es gelte $F^{(k)}(x_o) \neq \varphi F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2$. Dann folgt

(1) Es ist $R^{n,j}F \leq R^{n,k}F$ genau dann, wenn

(a) $F^{(k)}(x_o) \subset (\varphi F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2)$ ist, und

(b) für alle $x \in M$ folgende Inklusion gilt

$$\sum_{i=k+1}^{j-1}(x-x_o)^{i-k}\frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!}+(x-x_o)^{j-k}\frac{\varphi F^{(j)}(M)\dot{+}[-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2}{(k+1)\cdot\ \cdot\ \cdot\ j}$$

$$\subset (\varphi F^{(k)}(M)\dot{+}[-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2)\ominus F^{(k)}(x_o).$$

(2) Es ist $R^{n,k}F \leq R^{n,j}F$ genau dann, wenn

(a) $\varphi F^{(k)}(M)\dot{+}[-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \subset F^{(k)}(x_o)$ ist, und

(b) für alle $x\in M$ folgende Inklusion gilt

$$\overset{o}{\subset} (F^{(k)}(x_o)\ominus(\varphi F^{(k)}(M)\dot{+}[-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2))$$
$$\dot{+}\sum_{i=k+1}^{j-1}(x-x_o)^{i-k}\frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!}+(x-x_o)^{j-k}\frac{\varphi F^{(j)}(M)\dot{+}[-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2}{(k+1)\cdot\ \cdot\ \cdot\ j}.$$

Beweis. (1) Es gelte $R^{n,j}F \leq R^{n,k}F$. Ähnlich wie beim Beweis von 1o.2.7 erhält man

$$F^{(k)}(x_o)+(x-x_o)\frac{F^{(k+1)}(x_o)}{k+1}+\ldots+(x-x_o)^{j-k}\frac{\varphi F^{(j)}(M)\dot{+}[-1,1]\min_M F^{(j)}(x)/2}{(k+1)\cdot\ \cdot\ \cdot\ j}$$

$$\subset \varphi F^{(k)}(M)\dot{+}[-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2$$

für alle $x\in M$. Daraus erhält man nun sofort Teil (a) von (1). Beachtet man noch die Gültigkeit von $A\subset B\ominus C$ für $A,B,C\in\mathbb{II}$ mit $A+B\subset C$ und $\lambda C\leq \lambda B$, so erhält man aus obiger Inklusion auch den Rest der Behauptung.
Die andere Richtung von (1) beweist man ähnlich.
Der Beweis von (2) ist klar.

Folgerung 1o.2.15
Sei $F\in(\tilde{C}^{n,k}(M,\mathbb{II})\setminus\tilde{G}^{n,k}(M,\mathbb{II}))\cap(\tilde{C}^{n,j}(M,\mathbb{II})\setminus\tilde{G}^{n,j}(M,\mathbb{II}))$. Dann kann $R^{n,k}F = R^{n,j}F$ nie eintreten.

Beweis. Sei $R^{n,j}F = R^{n,k}F$. Dann folgt aus 1o.2.14 insbesondere, daß $F^{(k)}(x_o) = \varphi F^{(k)}(M)\dot{+}[-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2$ ist. Andererseits kann aber wegen 1o.2.1o der Fall $R^{n,j}F \leq R^{n,k}F$ nicht eintreten für F mit dieser Eigenschaft.

Unmittelbar klar ist die
Folgerung 1o.2.16
Falls für $F\in(\tilde{C}^{n,k}(M,\mathbb{II})\setminus\tilde{G}^{n,k}(M,\mathbb{II}))\cap\tilde{C}^{n,j}(M,\mathbb{II})$ keine der beiden Beziehungen $F^{(k)}(x_o) * (\varphi F^{(k)}(M)\dot{+}[-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2)$, wobei $*\in\{\subset,\supset\}$ ist, eintritt, so sind $R^{n,k}F$ und $R^{n,j}F$ nicht vergleichbar bzgl. der Ordnung $\leq$.

Beispiel 1o.2.17

Sei $M = [1,2]$, $x_o = 1$, $F: M \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto [x^3/3, 3+(1/x)]$ und $n \geq 3$ fest. Dann ist $F \in \tilde{C}^n$. Man zeigt leicht, daß $F \in \tilde{C}^{n,i}$ ist für $i = 1,2,3$. Wegen $\min_M \lambda F'(x) = 2$ und $\varphi F'(M) = [0, 1+(7/8)]$ ist $F \in \tilde{G}^{n,1}$. Es ist $\min_M \lambda F''(x) = 0$ und $\varphi F''(M) = [1+(\sqrt[4]{3}/3), 2+(1/8)]$, also folgt $F \notin \tilde{G}^{n,2}$. Es ist $\varphi F'''(M) = [-2, 13/16]$, und daher gilt $\lambda(\varphi F'''(M)) > \min_M \lambda F'''(x) = 2+(3/8)$, also $F \notin \tilde{G}^{n,3}$. Es soll überprüft werden, ob die $R^{n,i}F$, $i = 1,2,3$, vergleichbar sind.

Wegen 1o.2.6 kann nicht gelten $R^{n,3}F \leq R^{n,1}F$. Zusammen mit 1o.2.6,(2) erhält man: Es ist $R^{n,1}F \leq R^{n,3}F$ genau dann, wenn der folgende Durchschnitt nicht leer ist für alle $x \in M$

$$[-1/8, 2] \cap ((x-1) + (x-1)^2 [-13/96, -1/16]).$$

Man rechnet leicht nach, daß dies für alle $x \in M$ der Fall ist. Also gilt $R^{n,1}F \leq R^{n,3}F$.

Es ist $F''(x_o) = 2 \in \varphi F''(M) \dot{+} [-1, 1] \min_M \lambda F''(x)/2 = [1+(\sqrt[4]{3}/3), 2+(1/8)]$. Also kann höchstens $R^{n,3}F \leq R^{n,2}F$ gelten. Wegen 1o.2.14,(1) ist dies genau dann der Fall, wenn für alle $x \in M$ gilt

$$[-13(x-1)/48, 1(x-1)/8] \subset [-1+(\sqrt[4]{3}/3), 1/8].$$

Da dies nun aber für alle $x \in M$ richtig ist, so folgt also $R^{n,3}F \leq R^{n,2}F$.

Insgesamt erhält man also, daß $R^{n,1}F$ kleinstes Element der geordneten Menge $\langle \{R^{n,1}F, R^{n,2}F, R^{n,3}F\}, \leq \rangle$ ist. Weiterhin tritt hier nirgendwo die Gleichheit ein.

1o.3 Ein Algorithmus zur Angabe eines minimalen Elements der geordneten Menge $\langle \{R^{n,k}F/k \in M_F^n\}, \leq \rangle$ für $F \in \tilde{C}^n(M, \text{II})$

Für die in 1o.3 betrachteten I-Funktionen $F \in \tilde{C}^n$ sei stets vorausgesetzt, daß die Menge $M_F^n = \{n_1,..,n_r\}$ der natürlichen Zahlen $k \in \{1,..,n\}$ mit $F \in \tilde{C}^{n,k}$ mindestens zwei Elemente enthält.

Für gegebenes $F \in \tilde{C}^n$ mit dieser Eigenschaft soll nun in 1o.3 eine Entscheidungsvorschrift angegeben werden, mit der man unter den Approximationen der Form $R^{n,k}F, k \in M_F^n$, eine für F möglichst gute Einschließung erhält. Die Konstruktion dieses Algorithmus erfolgt in drei Schritten.

Zunächst sei für $F \in \tilde{C}^n$ die Teilmenge G_F^n von M_F^n definiert durch: Ein $k \in M_F^n$ ist genau dann Element von G_F^n, wenn $F \in \tilde{G}^{n,k}$ ist.

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

(1) $M_F^n = G_F^n$, (2) $G_F^n = \emptyset$, (3) $\emptyset \neq G_F^n \neq M_F^n$.

Fall (1)

Es ist $M_F^n = G_F^n$, d.h. für alle $k \in M_F^n$ gilt $F \in \tilde{G}^{n,k}$. Wir hatten schon gezeigt, daß bis auf eine genau charakterisierbare Ausnahmemenge hier die Approximation $R^{n,k}F$ mit dem kleinsten Koeffizienten $k \in M_F^n$ die günstigste Einschließung für F ist (vergl. 1o.2.1 und 1o.2.6). Es gilt

Hilfssatz 1o.3.1

Sei $F \in \tilde{C}^n(M, \text{II})$, und sei n_1 (= min M_F^n) $\notin K_F^n$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $j_o \in M_F^n$ mit der Eigenschaft

(a) Es ist $F \in \tilde{C}^{n,i}(M, \text{II})$ für alle $i \in \{n_1, n_1+1,..,j_o-1, j_o\}$, und

(b) für alle $i \in \{n_1, n_1+1,..,j_o-1\}$ gilt $i \notin K_F^n$.

Beweis.

Wegen $F \in \tilde{C}^{n,n_1}$ und $n_1 \notin K_F^n$ folgt aus 9.2.1o $F \in \tilde{C}^{n,n_1+1}$. Falls $(n_1+1) \in K_F^n$ ist, so erfüllt $j_o = n_1+1$ die Behauptung. Sonst ist wieder wegen 9.2.1o $F \in \tilde{C}^{n,n_1+2}$. Entweder ist dann $(n_1+2) \in K_F^n$, und dann erfüllt $j_o = n_1+2$ die Behauptung, oder es ist $F \in \tilde{C}^{n,n_1+3}$. Setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man spätestens für $j_o = n$ die Behauptung.

Nun ist man in der Lage zu formulieren

Satz 1o.3.2

Für $F \in \tilde{C}^n(M, \text{II})$ gelte $M_F^n = G_F^n$. Weiter sei

$$k_o = \begin{cases} n_1, & \text{falls } n_1 \in K_F^n \text{ ist} \\ j_o & \text{sonst, wobei } j_o \text{ nach 1o.3.1 bestimmt ist.} \end{cases}$$

Dann ist $R^{n,k_o}F$ minimales Element von $\langle \{R^{n,k}/k \in M_F^n\}, \leq \rangle$.

Beweis. Falls $k_o = n_1$ ist (d.h. $n_1 \in K_F^n$), dann folgt aus 1o.2.1 und aus 1o.2.6, daß für kein $j \in M_F^n$ $R^{n,j}F \leq R^{n,k_o}F$ und $R^{n,j}F \neq R^{n,k_o}F$ sein kann. Also gilt dann die Behauptung.
Falls $k_o = j_o$ ist, dann gilt $R^{n,j_o}F \leq R^{n,i}F$ für alle $i \in \{n_1,..,j_o-1\}$ wegen 1o.2.1,(1). Falls $j_o < n$ ist, so folgt nach Konstruktion von j_o $j_o \in K_F^n$ (vgl. 1o.3.1); wegen 1o.2.1 gibt es daher kein $j \in M_F^n$, $j_o < j$, mit $R^{n,j}F \leq R^{n,k_o}F$.

Fall (2)
Wegen $G_F^n = \emptyset$ gilt jetzt $F \notin \tilde{G}^{n,j}$ für alle $j \in M_F^n$. Sei $N_F^n = \{k_1,..,k_s\}$ jene Teilmenge von M_F^n, für die gilt: Es ist $k \in N_F^n$ genau dann, wenn $k < n$ ist und $(\varphi F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2) < F^{(k)}(x_o)$. Weiter sei $k_1 < k_2 < .. < k_s$. Dann gilt

Satz 1o.3.3
Für $F \in \tilde{C}^n(M, \mathbb{I})$ sei $G_F^n = \emptyset$. Weiter sei

$$k_o = \begin{cases} k_1 \ (= \min N_F^n), & \text{falls } N_F^n \neq \emptyset \\ n_r \ (= \max M_F^n), & \text{falls } N_F^n = \emptyset \end{cases}$$

Dann ist $R^{n,k_o}F$ minimales Element von $\langle \{R^{n,k}F / k \in M_F^n\}, \leq \rangle$.

Beweis. Sei $k_o = k_1$, d.h. es ist $N_F^n \neq \emptyset$. Angenommen, es gibt ein $j \in M_F^n$ mit $j < k_o$ und $R^{n,j}F \leq R^{n,k_o}F$. Wegen 1o.2.14 muß dann aber gelten $(\varphi F^{(j)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2) < F^{(j)}(x_o)$. Wegen $j < k_1$ und $k_1 = \min N_F^n$ ist das aber ein Widerspruch.
Sei nun $j \in M_F^n$ mit $k_o < j$. Wäre $R^{n,j}F \leq R^{n,k_o}F$, dann würde wegen 1o.2.14 $F^{(k_o)}(x_o) = (\varphi F^{(k_o)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(k_o)}(x)/2)$ folgen. Wir hatten aber schon gezeigt, daß in diesem Fall niemals $R^{n,j}F \leq R^{n,k_o}F$ gelten kann (vergl. 1o.2.15).
Sei nun $k_o = n_r$. Angenommen, es gibt ein $j \in M_F^n$ mit $R^{n,j}F \leq R^{n,k_o}F$. Es ist dann $j < k_o$, und daher folgt dann aus 1o.2.14
$(\varphi F^{(j)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2) < F^{(j)}(x_o)$.
Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme $N_F^n = \emptyset$.

Fall (3)
Es sind vier Fälle zu unterscheiden. Zunächst gilt

Satz 1o.3.4
Sei $F \in \tilde{C}^n(M, \mathbb{I})$ mit $\emptyset \neq G_F^n \neq M_F^n$. Weiter sei $F \in G^{n,n_1}(M, \mathbb{I})$, wobei $n_1 = \min M_F^n$ ist. Dann ist $R^{n,n_1}F$ minimales Element von $\langle \{R^{n,k}F / k \in M_F^n\}, \leq \rangle$.

Beweis. Wir stellen zunächst fest, daß $n_1 \in K_F^n$ ist. Denn sonst wäre $\lambda F^{(n_1)}(x_o) = o$, und wegen $F \in \tilde{G}^{n,n_1}$ würde dann $\varphi F^{(j)} = o$ sein für alle

$j \in M_F^n$ mit $n_1 < j$. Insbesondere müßte dann für alle $j \in M_F^n$ auch $F \in \tilde{G}^{n,j}$ gelten. Das ist aber ein Widerspruch zu $G_F^n \neq M_F^n$.
Also gilt $n_1 \in K_F^n$.
Damit folgt nun die Behauptung aus 1o.2.1 und 1o.2.6.

Sei nun $n_1 < j_1 = \min G_F^n$. Wir definieren $M_F^{n,j_1-1} = M_F^n \cap \{1,2,..,j_1-1\}$. Die Menge N_F^{n,j_1-1} sei in Analogie zu N_F^n definiert, d.h. N_F^{n,j_1-1} besteht aus den $k \in M_F^{n,j_1-1}$, für die $(\varphi F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2) \subset F^{(k)}(x_o)$ gilt.
Sei nun k_1 nach Fall (2) bzgl. M_F^{n,j_1-1} bestimmt, d.h. es ist

$$k_1 = \begin{cases} \min N_F^{n,j_1-1}, & \text{falls } N_F^{n,j_1-1} \neq \emptyset \text{ ist,} \\ \max M_F^{n,j_1-1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Index k_2 sei mit Hilfe von Fall (1) bezgl. der Menge G_F^n bestimmt. Dann folgt

Satz 1o.3.5

Sei $F \in \tilde{C}^n(M, \mathbb{I})$ mit $\emptyset \neq G_F^n \neq M_F^n$. Weiter gelte für $n_1 = \min M_F^n$ $F \notin \tilde{G}^{n,n_1}(M, \mathbb{I})$. Dann ist $R^{n,k_o}F$ minimales Element von $\langle \{R^{n,k}F / k \in M_F^n\}, \leq \rangle$, wobei k_o wie folgt definiert ist:

$$k_o = \begin{cases} k_1, & \text{falls eine der beiden folgenden Aussagen } A_1 \text{ oder } A_2 \text{ zutrifft,} \\ k_2 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei A_1, A_2 definiert sind durch:

A_1: Es gilt $F^{(k_1)}(x_o) \supsetneq (\varphi F^{(k_1)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(k_1)}(x)/2)$.

A_2: Es ist $F^{(k_1)}(x_o) = (\varphi F^{(k_1)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(k_1)}(x)/2)$, und es existiert ein $i \in \{k_1+1, k_1+2, .., k_2-1\}$ mit $F^{(i)}(x_o) \neq 0$, oder es gilt nicht $\varphi F^{(k_2)}(M) \subset [-1,1] \min_M \lambda F^{(k_2)}(x)/2$.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß $k_o = k_1$ ist, d.h., daß eine der beiden Aussagen A_1 oder A_2 zutrifft. Es gelte etwa A_1. Nach Konstruktion von k_1 gibt es dann kein $j < k_1$, so daß $R^{n,j}F = R^{n,k_1}F$ gilt und die beiden Approximationen verschieden sind. Sei also $j \in M_F^n$ und $k_1 < j$. Falls $F \notin G^{n,j}$ ist, so folgt aus $R^{n,j}F \leq R^{n,k}F$ wegen 1o.2.14 die Gleichheit $F^{(k_1)}(x_o) = \varphi F^{(k_1)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(k_1)}(x)/2$ mit Widerspruch zur Voraussetzung A_1. Auch für $F \in G^{n,j}$ führt die Annahme $R^{n,j}F = R^{n,k_1}F$ zu einem Widerspruch, wenn man 1o.2.1,(1), beachtet.
Es gelte A_2. Nach Konstruktion von k_1 gibt es kein $j < k_1$ mit $j \in M_F^n$, so daß $R^{n,j}F \leq R^{n,k_1}F$ ist und keine Gleichheit vorliegt. Dasselbe gilt für alle $j \in M_F^n$ mit $j > k_1$ und $F \notin G^{n,j}$. Sei also $j < k_1$, und es gelte $F \in G^{n,j}$.

Angenommen, es ist dann $R^{n,j}F \leq R^{n,k_1}F$. Dann folgt aber wegen 1o.2.7 $F^{(k_1+1)}(x_o) = .. = F^{(j-1)}(x_o) = \underset{\cdot}{0}$ und $\Psi F^{(j)}(M) \subset [-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2$.
Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:
(a) Es ist $k_2 = j_1 = \min G_F^n$. Dann folgt $F^{(i)}(x_o) = \underset{\cdot}{0}$ für alle $i \in \{k_1+1,..,k_2-1\}$ und $[-1,1] \min_M \lambda F^{(k_2)}(x)/2 \supset \Psi F^{(k_2)}(M)$ wegen $j > k_2$ mit Widerspruch zur Voraussetzung A_2.

(b) Es ist $\min G_F^n < k_2$. Dann ist $\lambda F^{(j_1)}(x_o) = o$, und wegen $F \in G^{n,j_1}$ folgt daraus $\Psi F^{(k_2)}(M) = \underset{\cdot}{0} \subset [-1,1] \min_M \lambda F^{(k_2)}(x)/2$. Weiter ist $F^{(i)}(x_o) = \underset{\cdot}{0}$ für alle $i \in \{k_1+1,..,k_2-1\}$ (vergl. den Beweis zu 1o.2.1). Das ist aber wieder ein Widerspruch zur Voraussetzung A_2.

Es gelte weder A_1 noch A_2. Falls für ein $j \in M_F^n$ mit $j < k_2$ und $F \notin \tilde{G}^{n,j}$ $R^{n,j}F \leq R^{n,k_2}F$ gilt, so folgt wegen 1o.2.1o $N_F^{n,j_1-1} \neq \emptyset$. Da die Aussage A_1 nicht gelten soll nach Voraussetzung, so folgt also die Gleichheit $F^{(k_1)}(x_o) = \Psi F^{(k_1)}(M) \ni [-1,1] \min_M \lambda F^{(k_1)}(x)/2$. Nach Voraussetzung soll auch Aussage A_2 nicht gelten. Also folgt $F^{(i)}(x_o) = \underset{\cdot}{0}$ für alle $i \in \{k_1+1,..,k_2-1\}$ und $\Psi F^{(k_2)}(M) \subset [-1,1] \min_M \lambda F^{(k_2)}(x)/2$. Wegen 1o.2.7 folgt daher aber $R^{n,k_2}F \leq R^{n,j}F$. Also folgt die Gleichheit $R^{n,j}F = R^{n,k_2}F$.
Sei nun $j \in M_F^n$ mit $k_2 < j$ und $F \notin \tilde{G}^{n,j}$. Wegen 1o.2.6 kann der Fall $R^{n,j}F \leq R^{n,k_2}F$ nicht eintreten.

Nach Konstruktion von k_2 gibt es kein $j \in G_F^n$ mit $R^{n,j}F \leq R^{n,k_2}F$ und der Eigenschaft $R^{n,j}F \neq R^{n,k_2}F$.
Damit ist 1o.3.5 bewiesen.

Beispiel 1o.3.6
Sei $M = [1,2]$, $x_o = 1$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [x^3/3, 3+(1/x)]$ und $n = 3$.
Dann ist $F \in \tilde{C}^n$, und es gilt $M_F^3 = \{1,2,3\}$, $G_F^3 = \{1\}$.
Wir suchen eine bestmögliche Einschließung für F unter den $R^{3,k}F$ für $k \in M_F^3$.
Da $G_F^3 \neq M_F^3$ ist, so tritt hier Fall (3) ein. Da für $n_1 = 1 = \min M_F^3$ $F \in \tilde{G}^{3,1}$ ist, so ist wegen Satz 1o.3.4 $R^{3,1}F$ die gesuchte Approximation.
Wir hatten schon gezeigt, daß $R^{3,1}F$ auch kleinstes Element der betrachteten Menge $\langle \{R^{3,1}F, R^{3,2}F, R^{3,3}F\}, \leq \rangle$ ist (vergl. Beispiel 1o.2.17).

Beispiel 1o.3.7
Sei $M = [-1,1]$, $x_o = -1$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \to [x^5, e^x]$ und $n = 5$.
Es ist $F \in \tilde{C}^5$. Gesucht ist ein minimales Element unter den $R^{5,k}F$, $k \in M_F^5$.
Es ist $M_F^5 = \{1,3,5\}$ und $G_F^5 = \{5\}$. Also tritt Fall (3) ein.
Mit den Bezeichnungen von vorher ist $k_2 = 5$. Es soll als nächstes k_1 bestimmt werden.

Es ist $F'(x_o) = [1/e,5]$, $\varphi F'(M) = [1/2,(5/2)+(1/2e)]$ und $\min_M \lambda F'(x) = o$. Also gilt auch $(\varphi F'(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F'(x)/2) \subset F'(x_o)$.
Somit ist die Menge $N_F^{5,4}$ (es ist $j_1 = k_2 = 5$!) nicht leer, und für $k_1 = 1$ gilt die Aussage A_1 von Fall (3). Wegen 1o.3.5 ist daher $R^{5,1}F$ das gesuchte minimale Element.
Mit den Mitteln von § 1o.2 zeigt man leicht, daß $R^{5,1}F$ auch kleinstes Element von $\langle [R^{5,j}F \,/\, j \in M_F^5\}, \in \rangle$ ist.

Man kann das Verfahren zum Auffinden eines minimalen Elements übersichtlicher darstellen, indem man es als Algorithmus formuliert.

Unter Beibehaltung der bisher benutzten Bezeichnungen erhält man

Algorithmus Ⓒ

Voraussetzungen: Sei $F \in \tilde{C}^n(M, \mathrm{II})$ mit $|M_F^n| \geq 2$.

1) Bestimmung von $M_F^n = \{n_1,..,n_r\}$ und von G_F^n.

2) Falls $M_F^n = G_F^n$ ist, so führe C_1 aus,

2a) falls $G_F^n = \emptyset$ ist, so führe C_2 aus,

2b) sonst führe C_3 aus.

C_1

1) Bestimmung von K_F^n nach Schema Ⓢ aus §7.2.

2) Falls $n_1 = \min M_F^n \in K_F^n$ ist, so setze $k_o = n_1$, sonst führe $C_{1,2}$ aus.

$C_{1,2}$

1) Bestimmung von $j_o \in M_F^n$ mit Hilfe von HS 1o.3.1.

2) Setze $k_o = j_o$.

C_2

1) Bestimmung von N_F^n.

2) Setze $k_o = \begin{cases} \min N_F^n, & \text{falls } N_F^n \neq \emptyset \text{ ist} \\ \max M_F^n = n_r & \text{sonst.} \end{cases}$

C_3

1) Bestimmung von $j_1 = \min G_F^n$.

2) Falls $j_1 = \min M_F^n = n_1$ ist, so setze $k_o = j_1$, sonst führe $C_{3,1}$ aus.

$\underline{C}_{3,1}$

1) Bestimmung von N_F^{n,j_1-1}.

2) Bestimmung von k_1 mit Hilfe von $\underline{C}_2$, wobei statt N_F^n jetzt N_F^{n,j_1-1} zugrunde liegt und statt M_F^n die Menge $M_F^{n,j-1}$.

3) Bestimmung von k_2 mit Hilfe von $\underline{C}_1$ bezgl. der Menge G_F^n.

4) Bestimmung von $\varphi F^{(k_1)}(M) \dot{+} [-1,1]\min_M \lambda F^{(k_1)}(x)/2$, $F^{(k_1)}(x_o)$, $F^{(i)}(x_o)$ für $i \in \{k_1+1, k_1+2, .., k_2-1\}$, $\varphi F^{(k_2)}(M)$ und $[-1,1]\min_M \lambda F^{(k_2)}(x)/2$.

5) Setze

$$k_o = \begin{cases} k_1, \text{ falls eine der Aussagen } A_1 \text{ oder } A_2 \text{ zutrifft,} \\ k_2 \text{ sonst,} \end{cases}$$

wobei A_1 und A_2 abkürzend für die folgenden Aussagen stehen:

A_1: Es gilt $\varphi F^{(k_1)}(M) \dot{+} [-1,1]\min_M \lambda F^{(k_1)}(x)/2 \not\leqq F^{(k_1)}(x_o)$.

A_2: Es ist $\varphi F^{(k_1)}(M) \dot{+} [-1,1]\min_M \lambda F^{(k_1)}(x)/2 = F^{(k_1)}(x_o)$, und es gibt ein $i \in \{k_1+1, k_1+2, .., k_2-1\}$ mit $F^{(i)}(x_o) \neq 0$, oder es gilt nicht $\varphi F^{(k_2)}(M) \subset [-1,1]\min_M \lambda F^{(k_2)}(x)/2$.

Dann gilt für das durch Ⓒ eindeutig bestimmte $k_o \in M_F^n$: Die Approximation $R^{n,k_o}F$ für F ist minimales Element der geordneten Menge $\langle \{R^{n,k}F / k \in M_F^n\}, \leq \rangle$.

1o.4 Ein Vergleich zwischen den $T^{n,k}F$ und $R^{n,j}F$ für $F \in \tilde{C}^n(M, \mathbb{I})$

In 1o.4 sollen für $F \in \tilde{C}^n$ mit $M_F^n \neq \emptyset$ die verschiedenen Einschließungen der Form $T^{n,j}F$, $j \in \{1,..,n\}$, mit denen der Form $R^{n,j}F$, $j \in M_F^n$, verglichen werden. Wir wollen uns dabei auf solche F beschränken, für die $K_F^n = \emptyset$ ist. Denn für $F \in \tilde{C}^n$ mit $K_F^n \neq \emptyset$ sind Approximationen der Form $T_{K_F^n}^{n,j}F$ in jedem Fall besser als solche der Form $T^{n,j}F$, und in diesem Fall hat man die bestmöglichen Einschließungen für F unter den $T_{K_F^n}^{n,j}F$ bzw. unter den $R_{K_F^n}^{n,j}F$ zu suchen, d.h. in diesem Fall sind die $T^{n,j}F$ bzw. die $R^{n,j}F$ nur von untergeordneter Bedeutung.

Für alle in 1o.4 betrachteten $F \in \tilde{C}^n$ gelte also $M_F^n \neq \emptyset$ und $K_F^n = \emptyset$. I-Funktionen F mit dieser Eigenschaft sind nun schon recht speziell, denn es gilt

Hilfssatz 1o.4.1

Sei $F \in \tilde{C}^n(M, \mathbb{I})$ mit $M_F^n \neq \emptyset$ und $K_F^n = \emptyset$, und sei $n_1 = \min M_F^n$. Dann gilt für alle $j \in \{n_1,..,n\}$ $F \in \tilde{C}^{n,j}$, und für alle $j \in \{n_1,..,n-1\}$ ist $\lambda F^{(j)}(x_o) = o$.

Beweis. Es ist $F \in \tilde{C}^{n,n_1}$ und $K_F^n = \emptyset$. Wegen 9.2.7 ist also $(\lambda F)^{(n_1)}(x_o) = o$, und daher auch $F \in \tilde{C}^{n,n_1+1}$. Wegen $K_F^n = \emptyset$ ist dann wieder $(\lambda F)^{(n_1+1)}(x_o) = o$ und $F \in C^{n,n_1+2}$, usw.. Nach $(n-n_1)$ Schritten erhält man die Behauptung.

Wir wollen als nächstes zeigen, daß für $F \in \tilde{C}^n$, die den Bedingungen von 1o.4.1 genügen, immer $R^{n,n}F$ die bestmögliche Einschließung unter den $T^{n,k}F$, $k=1,..,n$, $R^{n,k}F$, $k \in M_F^n$, für F liefert, bis auf eine genau charakterisierbare Ausnahmemenge.

Hilfssatz 1o.4.2

Sei $F \in \tilde{C}^n(M, \mathbb{I})$, und F genüge den Bedingungen von 1o.4.1. Dann ist $R^{n,n}F$ minimales Element von $\langle \{R^{n,k}F / k \in M_F^n\}, \leq \rangle$.

Beweis. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Sei zunächst $G_F^n = \emptyset$. Mit $n_1 = \min M_F^n$ gilt dann nach 1o.4.1 für alle $i \in \{n_1, n_1+1,..,n-1\}$ $F^{(i)}(x_o) = c_i$ für ein $c_i \in \mathbb{R}$. Wegen $G_F^n = \emptyset$ kann daher für kein $i \in M_F^n$ der Fall $\Upsilon F^{(i)}(M) \ni [-1,1] \min_{\mathbb{N}} \lambda F^{(i)}(x)/2 \cdot F^{(i)}(x_o)$ eintreten, d.h. es ist $N_F^n = \emptyset$. Damit ist aber wegen des Algorithmus Ⓒ aus § 1o.3 $R^{n,n}F$ minimales Element, da nach 1o.4.1 $n \in M_F^n$ ist.

Sei nun $G_F^n \neq \emptyset$ und $j_1 = \min G_F^n$. Wegen $\lambda F^{(j_1)} = o$ und $n_1 < j_1$ folgt weiter $G_F^n = \{j_1, j_1+1,..,n\}$. Wegen $j_1, j_1+1,..,(n-1) \notin K_F^n$ folgt dann nach 1o.2.1 $R^{n,n}F \leq R^{n,i}F$ für alle $i \in G_F^n$. Wie beim ersten Fall folgt auch hier $N_F^{n,j_1-1} = \emptyset$ und daher wieder aus dem Algorithmus Ⓒ die Behauptung.

Satz 1o.4.3

Sei $F \in \tilde{G}^{n,j}(M, \mathbb{I})$ für ein $j \in \{2,..,n\}$, und sei $k \in \{1,..,j-1\}$. Dann folgt:

(1) Aus $T^{n,k}F \leq R^{n,j}F$ folgt $T^{n,k}F = R^{n,j}F$.

(2) Es ist $R^{n,j}F \leq T^{n,k}F$ genau dann, wenn für alle $x \in M$ gilt

$$\sum_{i=k+1}^{j-1} (x-x_o)^{i-k} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!} \subset (F^{(k)}(M) \ominus F^{(k)}(x_o)) - (x-x_o)^{j-k} \frac{[-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j)}(M)}{(k+1)\,..\,..\,..\,j}.$$

Beweis. (1) Es sei etwa $x_o = a$. Dann erhält man aus $T^{n,k}F \leq R^{n,j}F$ $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ und die Gültigkeit von

$$-(x-x_o)^{j-k-1} \frac{[-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j)}(M)}{(k+2)\,..\,..\,..\,j} \subset \sum_{i=k+1}^{j-1} (x-x_o)^{i-k-1} \frac{(k+1)!F^{(i)}(x_o)}{i!}$$

für alle $x \in M$.

Da $k \notin K_F^n$ ist, so besitzt $(\lambda F)^{(k)}$ wegen $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ ein globales Maximum in x_o. Also folgt (vergl. auch den Beweis zu 8.2.4) $(\lambda F)^{(k+1)}(x_o) \leq o$. Da $(k+1) \notin K_F^n$ ist, muß in dieser Ungleichung Gleichheit gelten. Mit Hilfe von obiger Inklusion schließt man dann weiter, daß $F^{(k+1)}(x_o) = \dot{0}$ sein muß. Durch wiederholtes Anwenden dieser Schlußweise erhält man schließlich $F^{(i)}(x_o) = \dot{0}$ für alle $i = k+1,k+2,..,j-1$ und $[-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 = \varphi F^{(j)}(M)$. Also gilt $R^{n,j}F(x) = T^{n,k}F(x) + \dot{0}$ für alle $x \in M$ und damit die Behauptung.

Der Beweis von (2) ist klar.

Folgerung 1o.4.4

Unter den Voraussetzungen von 1o.4.3 tritt genau dann die Gleichheit $T^{n,k}F = R^{n,j}F$ ein, wenn $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ ist und $\varphi F^{(j)}(M) = [-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2$.

Satz 1o.4.5

Sei $F \in (\tilde{C}^{n,j}(M, \mathbb{I}) \setminus \tilde{G}^{n,j}(M, \mathbb{I}))$ für ein j mit $2 \leq j \leq n$, und sei $k \in \{1,..,j-1\}$.

(1) Es ist $T^{n,k}F \leq R^{n,j}F$ genau dann, wenn

(a) $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ gilt,

(b) $F^{(i)}(x_o) = \dot{0}$ für alle $i = k+1,k+2,..,n-1$ und

(c) $[-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \subset \varphi F^{(j)}(M)$ ist.

(2) Es ist $R^{n,j}F \leq T^{n,k}F$ genau dann, wenn

(a) $F^{(k)}(M) \neq F^{(k)}(x_o)$ ist und

(b) für alle $x \in M$ gilt

$$\sum_{i=k}^{j-1} (x-x_o)^{i-k} \frac{k! F^{(i)}(x_o)}{i!} + (x-x_o)^{j-k} \frac{\varphi F^{(j)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2}{(k+1)\,..\,..\,..j}$$

$$\subset F^{(k)}(M) \ominus F^{(k)}(x_o).$$

Beweis. (1) Es gelte $T^{n,k}F \leq R^{n,j}F$. Dann erhält man $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ und

$$\underset{\cdot}{0} \subset F^{(k+1)}(x_o) + .. + (x-x_o)^{j-k-1} \frac{\varphi F^{(j)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2}{(k+2)\,..\,..\,..j}$$

für alle $x \in M$. Ähnlich wie im Beweis von 1o.4.3 erhält man daraus $F^{(i)}(x_o) = \underset{\cdot}{0}$ für alle $i = k+1,..,j-1$ und die Inklusion $\underset{\cdot}{0} \subset \varphi F^{(j)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2$. Nun gilt für Intervalle $A,B \in \mathbb{I}$ mit $\lambda B \leq \lambda A$: Es ist $\underset{\cdot}{0} \subset A \dot{+} B$ genau dann, wenn $(-B) \subset A$ gilt.
Also folgt $[-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \subset \varphi F^{(j)}(M)$.
Die Umkehr von (1) ist klar.

(2) Es sei $R^{n,j}F \leq T^{n,k}F$. Daraus erhält man für alle $x \in M$

$$(x-x_o)F^{(k+1)}(x_o) + .. + (x-x_o)^{j-k-1} \frac{\varphi F^{(j)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2}{(k+2)\,..\,..\,..j}$$

$$\subset F^{(k)}(M) \ominus F^{(k)}(x_o).$$

Wäre $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$, so würde aus obiger Inklusion insbesondere $\min_M \lambda F^{(j)}(x) = \lambda(\varphi F^{(j)}(M))$ und damit $F \in \tilde{G}^{n,j}$ folgen mit Widerspruch zur Voraussetzung.
Die Umkehr von (2) ist klar.

Es ist auffällig, daß unter den Voraussetzungen von 1o.4.5 sowohl $T^{n,k}F \leq R^{n,j}F$ als auch $R^{n,j}F \leq T^{n,k}F$ möglich ist, während andererseits gilt

Folgerung 1o.4.6

Unter den Voraussetzungen von 1o.4.5 kann nie die Gleichheit $T^{n,k}F = R^{n,j}F$ eintreten.

Beweis. Wäre $T^{n,k}F = R^{n,j}F$, so müßte wegen 1o.4.5 ,(1), u.a. $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ sein. Das ist aber ein Widerspruch zu 1o.4.5,(2).

Beispiel 1o.4.7

Sei $M = [1,2]$, $x_o = 2$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \longrightarrow [x^3/3, 3+(1/x)]$ und $n = 2$.
Es ist $F \in \tilde{C}^2$, $K_F^2 = \emptyset$ und $M_F^n = \{2\}$. Wegen $\min_M \lambda F''(x) = 0$ und $\varphi F''(M) = [1+(\sqrt[4]{3}/3), 2+(1/8)]$ folgt weiter $F \notin \tilde{G}^{2,2}$.

Es soll überprüft werden, welche der Einschließungen $T^{2,1}F$ bzw. $T^{2,2}F$ bzw. $R^{2,2}F$ die für F bestmögliche Einschließungsschärfe bietet.
Wir hatten bereits in 9.5.1 gezeigt, daß $R^{2,2}F \leq T^{2,2}F$ ist.
Notwendig dafür, daß $T^{2,1}F \leq R^{2,2}F$ eintritt, ist u.a. die Gültigkeit von $F'(M) = F'(x_o)$. Nun ist aber $F'(M) = [-1,4] \neq F'(x_o) = [-1/4,4]$.
Also kann höchstens $R^{2,2}F \leq T^{2,1}F$ gelten.
Wegen 1o.4.5 ist dies aber genau dann der Fall, wenn für alle $x \in M$

$$(x-2)(\diamond F''(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F''(x)/2)/2 \subset F'(M) \ominus F'(x_o)$$ gilt.

Man rechnet leicht nach, daß dies nicht der Fall ist. Also sind $R^{2,2}F$ und $T^{2,1}F$ unvergleichbar bezgl. der Ordnung $\leq$ für I-Funktionen.
Dasselbe trifft auch auf die $T^{2,k}F$, k = 1,2, zu, wie man mit Hilfe der Aussagen von § 6 zeigt.

Wir stellen fest, daß bis auf die in 1o.4.5 beschriebene Ausnahmemenge die Einschließung $R^{n,n}F$ die günstigste Approximation für jedes $F \in \widetilde{C}^n$ mit $M_F^n \neq \emptyset$ und $K_F^n = \emptyset$ ist. Man kann nun auch leicht eine Vorschrift konstruieren, die für gegebenes F mit diesen Eigenschaften ein minimales Element der geordneten Menge $\langle \{T^{n,k}F / k \in \{1,..,n\}\} \cup \{R^{n,j}F / j \in M_F^n\}, \leq \rangle$ liefert. Zunächst gilt der

Hilfssatz 1o.4.8
Sei $F \in \widetilde{C}^n(M, \mathbb{I})$ mit $M_F^n \neq \emptyset$ und $K_F^n = \emptyset$. Weiter gelte $F \notin \widetilde{G}^{n,n}(M, \mathbb{I})$.
Dann existiert höchstens ein $k \in \{1,..,n-1\}$ mit $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$,
und es ist weiter $k < n_1 = \min M_F^n$, falls so ein k existiert.

Beweis. Angenommen, es gibt $k_1 < k_2$ aus $\{1,..,n-1\}$ mit $F^{(k_i)}(M) = F^{(k_i)}(x_o)$.
Dann besitzt $(\lambda F)^{(k_i)}$ ein Maximum in x_o. Wegen $K_F^n = \emptyset$ folgt daher mit bekannten Schlüssen schließlich $(\lambda F)^{(k_2)}(x_o) = o$ (vgl. 8.2.4). Also gilt $F^{(k_2)}(M) = \underset{\cdot}{c}$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und daher $F^{(n)} = \underset{\cdot}{o}$. Wegen 1o.4.1 ist aber andererseits $F \in \widetilde{C}^{n,n}$. Wegen $F^{(n)} = \underset{\cdot}{o}$ ist daher auch $F \in \widetilde{G}^{n,n}$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.
Sei nun $k \in \{1,..,n-1\}$ mit $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ und $k \geq n_1 = \min M_F^n$
Nun ist aber wegen 1o.4.1 $k \in M_F^n$ und daher wegen 9.2.7 $(\lambda F)^{(k)}(x_o) = o$.
Also folgt $F^{(k)}(M) = \underset{\cdot}{c}$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und damit wieder $F \in \widetilde{G}^{n,n}$ mit Widerspruch.

Satz 1o.4.9
Sei $F \in \widetilde{C}^n(M, \mathbb{I})$ mit $M_F^n \neq \emptyset$ und $K_F^n = \emptyset$. Dann ist $n \in M_F^n$, und es folgt

(1) Falls $F \in \widetilde{G}^{n,n}(M, \mathbb{I})$ ist, und falls ein $k \in \{1,..,n_1-1\}$ existiert,
$n_1 = \min M_F^n > 1$, mit

(a) $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$,

(b) $F^{(i)}(x_o) = 0$ für alle $i = k+1,k+2,..,n-1$ und

(c) $[-1,1] \min_M \lambda F^{(n)}(x)/2 \subset \varphi F^{(n)}(M)$,

dann ist $T^{n,k}F$ minimales Element der geordneten Menge
$\langle \{T^{n,s}F / s \in \{1,..,n\}\} \cup \{R^{n,j}F / j \in M_F^n\}, \leq \rangle$.

(2) Falls der Fall (1) nicht eintritt, so ist $R^{n,n}F$ minimales Element der obigen geordneten Menge.

Beweis. Wegen 1o.4.1 ist $n \in M_F^n$.
(1) Sei k wie in (1). Wegen 1o.4.8 ist dann für $i \in \{1,..,n-1\}$ mit $k \neq i$ $F^{(i)}(M) \neq F^{(i)}(x_o)$, und daher ist $T^{n,k}F$ minimales Element von $\langle \{T^{n,s}F / s \in \{1,..,n\}\}, \leq \rangle$. Aus (a) von (1) folgt wegen 1o.4.5,(2), daß es kein $j \in M_F^n$ mit $R^{n,j}F \leq T^{n,k}F$ gibt (wegen 1o.4.8 ist stets $j > k$).

(2) Der Fall (1) trete nicht ein. Dann ist entweder $F \in \tilde{G}^{n,n}$, und dann folgt die Behauptung wegen 1o.4.3,(1), oder einer der übrigen Fälle tritt nicht ein, woraus dann die Behauptung wegen 1o.4.5 folgt.

Beispiel 1o.4.1o

Sei $M = [o,\pi/2]$, $x_o = o$, $F: M \to \mathbb{R}^2$ mit $x \longmapsto [-\sin x, \cos x]$ und $n = 2$.
Dann ist $F \in \tilde{C}^2$. Weiter ist $K_F^2 = \emptyset$ und $M_F^2 = \{2\} \neq \emptyset$. Wegen $\min_M \lambda F''(x) = 1$ und $\varphi F''(M) = [-1/2,1/2]$ ist $F \in \tilde{G}^{2,2}$.
Wegen 1o.4.9 ist daher $R^{2,2}F$ minimales Element unter den für F zur Verfügung stehenden Approximationen bis zur Ordnung 2 der Form $T^{2,j}F$ bzw. $R^{2,j}F$.
Beachtet man noch $F'(M) = F'(x_o)$ und $\varphi F''(M) = [-1,1] \min_M \lambda F''(x)/2$, so folgt mit 1o.4.4 die Gleichheit $R^{2,2}F = T^{2,1}F$.

Bemerkung 1o.4.11

Man kann natürlich auch Aussagen über das Verhalten von $T^{n,j}F$ und $R^{n,k}F$, $F \in \tilde{C}^{n,k}$ und $k < j$, bzgl. der Ordnung $\leq$ für I-Funktionen machen. Da diese Aussagen jedoch nicht zum Auffinden eines minimalen Elements von $\langle \{T^{n,1}F,..,T^{n,n}F\} \cup \{R^{n,j}F / j \in M_F^n\}, \leq \rangle$ benötigt werden, so soll darauf verzichtet werden.

Mittels 1o.4.9 kann man nun den gesuchten Algorithmus angeben:

Algorithmus Ⓓ

Voraussetzungen: Sei $F \in \tilde{C}^n$ mit $M_F^n \neq \emptyset = K_F^n$.

1) Eingabe von M_F^n.

2) Falls $F \in \tilde{G}^{n,n}$ ist oder $n_1 = \min M_F^n = 1$, so setze $\alpha = R^{n,n}F$, sonst

3) Eingabe von $F^{(k)}(x_o)$, $F^{(k)}(M)$ für $k = 1,..,n_1-1$.

4) Falls $F^{(k)}(x_o) \neq F^{(k)}(M)$ ist für alle $k = 1,..,n_1-1$, so setze $\alpha = R^{n,n}F$, sonst

5) sei $k_1 \in \{1,..,n_1-1\}$ der (nach 1o.4.8 eindeutig bestimmte) Index mit $F^{(k_1)}(x_o) = F^{(k_1)}(M)$.

6) Eingabe von $F^{(i)}(x_o)$ für $i = n_1, n_1+1,..,n-1$.

7) Falls ein $i \in \{k_1+1,..,n-1\}$ existiert mit $F^{(i)}(x_o) \neq 0$, so setze $\alpha = R^{n,n}F$, sonst

8) Eingabe von $[-1,1] \min_M \lambda F^{(n)}(x)/2$ und $\varphi F^{(n)}(M)$.

9) Falls $[-1,1] \min_M \lambda F^{(n)}(x)/2 \subset \varphi F^{(n)}(M)$ ist, so setze $\alpha = T^{n,k_1}F$, sonst

1o) setze $\alpha = R^{n,n}F$.

Dann ist die Approximation α für F minimales Element von $\langle \{T^{n,1}F,..,T^{n,n}F\} \cup \{R^{n,j}F \mid j \in M_F^n\}, \leq \rangle$.

10.5 Ein Vergleich zwischen den $T^{n,k}_{K^n_F}F$ und $R^{n,j}_{K^n_F}F$ für $F \in \tilde{C}^n$, $k \in \{1,..,n\}$ und $j \in M^n_F$

Nachdem wir in 10.4 für I-Funktionen $F \in \tilde{C}^n$ mit $M^n_F \neq \emptyset$ und $K^n_F = \emptyset$ Kriterien für die Vergleichbarkeit von Approximationen der Form $T^{n,k}_F$ und $R^{n,j}_F$ aufgestellt und einen Algorithmus zur Angabe eines minimalen Elements der geordneten Menge $\langle \{T^{n,k}_F / k \in \{1,..,n\}\} \cup \{R^{n,j}_F / j \in M^n_F\}, \leq \rangle$ konstruiert haben, wollen wir diese Untersuchungen auf den allgemeinen Fall, d.h. auf I-Funktionen $F \in \tilde{C}^n$ mit $M^n_F \neq \emptyset \neq K^n_F$ ausdehnen. Unser Ziel ist es wieder, diesmal für die geordnete Menge $\langle \{T^{n,k}_{K^n_F}F / k \in \{1,..,n\}\} \cup \{R^{n,j}_{K^n_F}F / j \in M^n_F\}, \leq \rangle$ ein minimales Element, d.h. eine möglichst gute Einschließung für F, zu finden.

In 10.5 werden zunächst Vergleichskriterien für Approximationen der oben genannten Form hergeleitet. Zur Konstruktion des gewünschten Algorithmus benötigt man auch Aussagen über die Vergleichbarkeit von Einschließungen der Form $R^{n,k}_{K^n_F}F$ und $R^{n,j}_{K^n_F}F$ für $k,j \in M^n_F$. Diese werden in 10.6 hergeleitet. Mit Hilfe der Ergebnisse von 10.5 und 10.6 wird dann der gesuchte Algorithmus konstruiert. (Nach Vereinbarung schreiben wir $R^{n,j}_{K^n_F}F$ statt $R^{n,j}_{K^n_F}F$, usw. .)

Für 10.5 und die beiden folgenden Paragraphen sei für die betrachteten I-Funktionen $F \in \tilde{C}^n$ stets $M^n_F \neq \emptyset \neq K^n_F$ vorausgesetzt. Weiter gelte für die im weiteren häufig vorkommenden $k,j \in \mathbb{N}$ immer $k,j \in \{1,..,n\}$ und $k<j$.

Satz 10.5.1

Sei $F \in \tilde{G}^{n,k}(M, \mathbb{I})$ und $k \in K^n_F$. Dann folgt für $k<j$:

(1) Es ist $R^{n,k}_{K^n_F}F \in T^{n,j}_{K^n_F}F$ genau dann, wenn

(a) $F^{(k)}(x_o) = [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dotplus \varphi F^{(k)}(M)$ ist und

(b) für alle $x \in M$ gilt

$$\sum_{i \in K^n_F \cup \{k\}} |x-x_o|^{i-k-1} \frac{(k+1)!\,\lambda F^{(i)}(x_o)}{i!} \leq \sum_{\substack{i=k+2 \\ i \notin K^n_F}}^{j-1} |x-x_o|^{i-k-1} \frac{(k+1)!\,\lambda F^{(i)}(x_o)}{i!} + |x-x_o|^{j-k-1} \frac{\max_M \lambda F^{(j)}(x)}{(k+2)..\,..j}$$

Insbesondere gilt also stets $R^{n,k}_{K^n_F}F \; T^{n,j}_{K^n_F}F$, falls $K^j_F = K^k_F \cup \{k\}$ ist.

(2) Es ist $T^{n,j}_{K^n_F}F \leq R^{n,k}_{K^n_F}F$ genau dann, wenn für alle $x \in M$ gilt

$$\sum_{\substack{i=k+1 \\ i \notin K^n_F}}^{j-1} (x-x_o)^{i-k} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!} + (x-x_o)^{j-k} \frac{F^{(j)}(M)}{(k+1)..j} \subset \left([-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dotplus \varphi F^{(k)}(M) \right) \ominus F^{(k)}(x_o) - \sum_{i \in K^n_F \setminus \{k\}} (x-x_o)^{i-k} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!}$$

Falls die Bedingung (a) von (1) gilt, so folgt aus $T^{n,j}_{K^n_F}F \leq R^{n,k}_{K^n_F}F$ stets die Gleichheit.

Beweis. (1) Es gelte $R^{n,k}_{K^k_F} F \leq T^{n,j}_{K^j_F} F$, und es sei etwa $x_o = a$.
Wegen der Gültigkeit von $A \subset C - B$ für Intervalle $A,B,C \in \mathbb{I}$ mit $\lambda B \leq \lambda A$ und $A \dot{+} B \subset C$ erhält man dann aus der Annahme

$$(\alpha) \quad - \sum_{i \in K^k_F \cup K^n_F} (x-x_o)^i \frac{F^{(i)}(x_o)}{i!} \subset \sum_{\substack{i<k \\ i \notin K^j_F}} (x-x_o)^i \frac{F^{(i)}(x_o)}{i!} + (x-x_o)^j \frac{F^{(j)}(M)}{j!} - (x-x_o)^k \frac{[-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(k)}(M)}{k!}$$

für alle $x \in M$.
Wegen $k \in K^n_F$ erhält man aus (α) sofort die Inklusion $F^{(k)}(x_o) \subset [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(k)}(M)$. Da $F \in \bar{G}^{n,k}$ ist, so gilt auch die umgekehrte Inklusion (der Beweis hierzu geht wörtlich so wie für den Fall k = 1, vergl. 4.4.1) wegen $\wedge F^{(k)} \supset [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(k)}(M)$, und damit gilt Teil (a) von (1).
Wegen (a) von (1) folgt nun $F^{(k)}(x_o) \subset F^{(k)}(x)$ für alle $x \in M$. Daraus erhält man aber wegen $k \in K^n_F$ $F^{(k+1)}(x_o) = [g^{(k+1)}(x_o), f^{(k+1)}(x_o)], \underset{\cdot}{0} \subset F^{(k+1)}(x_o)$ und $(\lambda F)^{(k)}(x_o) = \min_M (\lambda F)^{(k)}(x)$, wobei $F = [f,g]$ ist.
Andererseits folgt aber wegen $\min_M (\lambda F)^{(k)}(x) = (\lambda F)^{(k)}(x_o)$ auch $(\lambda F)^{(k+1)}(x_o) \geq o$ (vergl. den Beweis zu 8.2.4), d.h. es muß gelten $F^{(k+1)}(x_o) = [f^{(k+1)}(x_o), g^{(k+1)}(x_o)]$. Wegen $\underset{\cdot}{0} \subset F^{(k+1)}(x_o)$ folgt daher $F^{(k+1)}(x_o) = \underset{\cdot}{0}$.
Damit erhält man aus (α) folgende Inklusion für jedes $x \in M$

$$(\beta) \quad - \sum_{\substack{i<k+2 \\ i \in K^j_F}} (x-x_o)^{i-k-1} \frac{(k+1)! F^{(i)}(x_o)}{i!} \subset \sum_{\substack{i<k+2 \\ i \notin K^j_F}} (x-x_o)^{i-k-1} \frac{(k+1)! F^{(i)}(x_o)}{i!} + (x-x_o)^{j-k-1} \frac{F^{(j)}(M)}{(k+2)..j}.$$

Wegen $F^{(k)}(x_o) = [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j)}(M)$ erhält man weiter $\min_M \lambda F^{(k)}(x) = \lambda F^{(k)}(x_o)$ und $\lambda(\varphi F)^{(k)}(M) = o$, d.h. $\varphi F^{(k)}(M) = \varphi F^{(k)}(x_o)$.
Also folgt für $i = 1,..,n-k$ $\varphi F^{(k+i)} = o$, d.h. die Ableitungen $F^{(k+i)}$ von F sind alle symmetrisch für diese i. Damit gilt insbesondere für alle $s \in \mathbb{N}$ mit $k < s \leq n$ $F^{(s)}(x_o) = [-1,1] \lambda F^{(s)}(x_o)/2$ und $F^{(j)}(M) = \bigcup_M F^{(j)}(x) = [-1,1] \max_M \lambda F^{(j)}(x)/2$. Setzt man dies in (β) ein und wendet dann auf die so erhaltene Inklusion das λ-Funktional an, so erhält man wegen $\lambda(-A) = \lambda A$ auch Teil (b) der Behauptung.
Es gelten umgekehrt (a) und (b) von (1). Wie zuvor erhält man dann $F^{(k+1)}(x_o) = \underset{\cdot}{0}$ und $\varphi F^{(k+i)} = o$ für $i = 1,..,n-k$. Daraus wiederum folgt die Symmetrie der $F^{(k+i)}(x_o)$ für diese i und die Gültigkeit von $F^{(j)}(M) = [-1,1] \max_M \lambda F^{(j)}(x)/2$. Nun ist für symmetrische Intervalle

$A,B \in \mathbb{I}$ $A \subset B$ genau dann, wenn $\lambda A \leq \lambda B$ ist. Weiter ist die Summe von symmetrischen Intervallen wieder symmetrisch. Daher folgt aus (b) von (1) die Inklusion (ß) für jedes $x \in M$. Daraus erhält man nun leicht die Behauptung.

(2) Der Beweis von (2) ist klar, wenn man noch folgendes beachtet:
Für Intervalle $A,B,C \in \mathbb{I}$ mit $\lambda C \leq \lambda A$ gilt $(-(A+B)) \dot{+} C = (C \ominus A) - B$.
Der Zusatz zu (2) folgt nun zusammen mit (2) aus 8.2.4, (ß) oder (γ).

Unter Verwendung von 3.5.3 erhält man aus 1o.5.1 die

Folgerung 1o.5.2

Unter den Voraussetzungen von 1o.5.1 tritt genau dann die Gleichheit $T^{n,j}_{K^j} F = R^{n,k}_{K^k} F$ ein, wenn $F^{(k)} = C$ ist für ein $C \in \mathbb{I}$ mit $\lambda C > o$.

Bemerkung 1o.5.3

Für $F \in \tilde{G}^{n,k}(M, \mathbb{I})$ ist stets $\bigcap_M F^{(k)}(x) \supseteq [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(k)}(M)$.
Der Beweis hierzu ist der gleiche wie im Fall $k = 1$ (vergl. 4.4.1).
Falls unter den Voraussetzungen von 1o.5.1 der Fall (1),(a) eintritt, dann folgt also notwendig $\bigcap_M F^{(k)}(x) = F^{(k)}(x_o)$. Diese Folgerung läßt sich aber nicht umkehren, wie das folgende Beispiel zeigt:
Sei $M = [o,1]$, $x_o = o$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [x^3, -x^2-x+3]$ und $n > 1$ fest.
Dann ist $F \in \tilde{C}^{n,1}$ und wegen $\min_M \lambda F'(x) = 1$ und $\varphi F'(M) = [-2/3, o]$ auch $F \in \tilde{G}^{n,1}$. Weiter ist $1 \in K^n_F$.
Nun gilt $F'(x_o) = \bigcap_M F'(x)$. Andererseits ist $[-1,1] \min_M \lambda F'(x)/2 \dot{+} \varphi F'(M) = [-1/2, 1/2] \dot{+} [-2/3, o] = [-1/2, -1/6] \neq F'(x_o)$.

Bemerkung 1o.5.4

Die I-Funktionen F, für die unter den Vorausetzungen von 1o.5.1 $R^{n,k}_{K^k} F \leq T^{n,j}_{K^j} F$ gelten kann, sind schon recht speziell. Das folgende Beispiel zeigt, daß es solche Funktionen auch wirklich gibt:
Sei $M = [o,1]$, $x_o = o$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [e^x, 6-e^x]$ und $n > 1$ fest.
Dann ist $F \in \tilde{C}^{n,1}$ und wegen $\varphi F' = o$ auch $F \in \tilde{G}^{n,1}$.
Es soll überprüft werden, ob $R^{n,1}_{K^1} F \leq T^{n,2}_{K^2} F$ ist.
Die Voraussetzungen von 1o.5.1 sind erfüllt. Es muß also nur überprüft werden, ob die Bedingungen (a) und (b) aus (1) erfüllt sind.
Zunächst ist $F'(x_o) = [-1,1] = [-1,1] \min_M \lambda F'(x)/2 \dot{+} \varphi F'(M)$. Wegen $K^2_F = \{1\}$ ist (b) trivialerweise erfüllt. Also gilt $R^{n,1}_{K^1} F \leq T^{n,2}_{K^2} F$.

Beispiel 1o.5.5

Sei $M = [-1,o]$, $x_o = -1$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [x^3, e^x]$ und $n = 4$.

Es ist $F \in \tilde{C}^4$. Weiter gilt $F \in \tilde{C}^{4,3}$ und wegen $\min_M \lambda F'''(x) = 5$, $\varphi F'''(M) = [3+(1/2e), 3+(1/2)]$ auch $F \in \tilde{G}^{4,3}$.
Es soll überprüft werden, ob $T^{4,4}_{K^4_F} F$ und $R^{4,3}_{K^3_F} F$ vergleichbar sind.
Wegen $K^4_F = \{1,3\}$ sind die Voraussetzungen von 1o.5.1 erfüllt.
Es ist $F'''(x_o) = [1/e,6] \not\supseteq \bigcap_M F'''(x) = [1,6]$. Also kann (a) von Fall (1) nicht eintreten, und damit kann nicht $R^{4,3}_{K^3_F} F \leq T^{4,4}_{K^4_F} F$ gelten.
Also kann höchstens $T^{4,4}_{K^4_F} F \leq R^{4,3}_{K^3_F} F$ eintreten. Mit $k = 3$ und $j = 4$ ist dies nach 1o.5.1, (2) genau dann der Fall, wenn für alle $x \in M$ gilt

$$(x-x_o)\, F^{(4)}(M)/4 \subset ([-1,1] \min_M \lambda F'''(x)/2 \dot{+} \varphi F'''(M)) \ominus F'''(x_o).$$

Wegen $F^{(4)}(M) = [0,1]$, $[-1,1] \min_M \lambda F'''(x)/2 \dot{+} \varphi F'''(M) = [1,5+(1+e/2e)]$ und $F'''(x_o) = [1/e,6]$ ist dies gleichwertig mit
$(x+1)\,[0,1/4] \subset [-1/2e, 1/e]\,(e-1)$ für alle $x \in M$. Diese Inklusion gilt nun aber für jedes $x \in M$, und daher folgt $T^{4,4}_{K^4_F} F \leq R^{4,3}_{K^3_F} F$. Wegen 1o.5.2 tritt hier keine Gleichheit ein.

Man kann 1o.5.1 so interpretieren, daß $T^{n,j}_{K^j_F} F$ der Approximation $R^{n,k}_{K^k_F} F$ bis auf eine Ausnahmemenge vorzuziehen ist. Verzichtet man in 1o.5.1 auf die Forderung $k \in K^n_F$, so erhält man bis auf eine Ausnahmemenge das umgekehrte Ergebnis. Genauer gilt.

Satz 1o.5.6
Sei $F \in \tilde{G}^{n,k}(M, \mathbb{I})$ für ein $k < n$, und es gelte $k \notin K^n_F$. Dann folgt für $j \in \mathbb{N}$ mit $k < j < n$:

(1) Falls $K^k_F = K^j_F$ ist, dann gilt stets $R^{n,k}_{K^k} F \leq T^{n,j}_{K^j_F} F$.

(2) Für $K^k_F \neq K^j_F$ ist $T^{n,j}_{K^j_F} F \leq R^{n,k}_{K^k} F$ genau dann, wenn für alle $x \in M$ gilt

$$\sum_{\substack{i=k+1 \\ i \notin K^j_F}}^{j-1} |x-x_o|^{i-k} \frac{k!\,\lambda F^{(i)}(x_o)}{i!} + |x-x_o|^{j-k} \frac{\max_M \lambda F^{(j)}(x)}{(k+1)\,..\,..j} \leq \sum_{\substack{j=k+1, \\ i \in K^j_F}}^{j-1} |x-x_o|^{i-k} \frac{k!\,\lambda F^{(i)}(x_o)}{i!}.$$

(3) Es ist $R^{n,k}_{K^k} F \leq T^{n,j}_{K^j_F} F$ genau dann, wenn für alle $x \in M$ gilt

$$\sum_{\substack{i=k+1 \\ i \in K^j_F}}^{j-1} |x-x_o|^{i-k} \frac{k!\,\lambda F^{(i)}(x_o)}{i!} \leq \sum_{\substack{i=k+1 \\ i \notin K^j_F}}^{j-1} |x-x_o|^{i-k} \frac{k!\,\lambda F^{(i)}(x_o)}{i!} + |x-x_o|^{j-k} \frac{\max_M \lambda F^{(j)}(x)}{(k+1)\,..\,..j}.$$

Beweis. Wir stellen zunächst fest, daß aus $F \in \tilde{G}^{n,k}$ und aus $k \notin K^n_F$ $F^{(k)}(x_o) = [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(k)}(M) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und

$\varphi F^{(k+i)} = o$ folgt für $i = 1,..,n-k$.

(1) ist ein Spezialfall von (3). Wir beginnen mit dem Beweis von (2).
Es gelte $T^{n,j}_{K^j_F} F \leq R^{n,k}_{K^k_F} F$. Dann erhält man mit bekannten Mitteln wegen der Gleichheit $F^{(k)}(x_o) = [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dotplus \varphi F^{(k)}(M)$

$$\sum_{\substack{i<j\\ i\notin K^j_F}} (x-x_o)^{i-k} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!} + (x-x_o)^{j-k} \frac{F^{(j)}(M)}{(k+1)..j} \subset -\sum_{i\in K^j_F \cap K^k_F} (x-x_o)^{i-k} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!}$$

für alle $x \in M$. Wir hatten schon festgestellt, daß $\varphi F^{(k+i)} = o$ ist für alle $i = 1,..,n-k$. Damit erhält man die Behauptung ähnlich wie bei 1o.5.1.
Die Umkehr von (2) ist klar.

(3) Der Beweis zu (3) verläuft ähnlich wie der zu (2), wenn man wieder $\varphi F^{(k+i)} = o$ beachtet für $i = 1,..,n-k$.

Folgerung 1o.5.7

Unter den Voraussetzungen von 1o.5.6 tritt genau dann die Gleichheit $T^{n,j}_{K^j_F} F = R^{n,k}_{K^k_F} F$ ein, wenn $F^{(k)} = c$ ist für ein $c \in \mathbb{R}$. Insbesondere kann also nie die Gleichheit eintreten, wenn $K^k_F \neq K^j_F$ ist.

Bemerkung 1o.5.8

Da auch hier wieder die I-Funktionen F, für die $T^{n,j}_{K^j_F} F \leq R^{n,k}_{K^k_F} F$ eintreten kann, recht speziell sind, so soll durch ein Beispiel belegt werden, daß es auch solche Funktionen gibt.
Sei $M = [-1,0]$, $x_o = o$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [x^2, -x^2+2]$ und $n = 3$.
Dann ist $F \in \tilde{G}^{3,1}$. Es ist $1 \notin K^3_F = \{2\}$. Frage: Ist $T^{3,3}_{K^3_F} F \leq R^{3,1}_{K^1_F} F$?
Es ist $K^1_F \neq K^3_F$, und daher ist dies nach 1o.5.6 genau dann der Fall, wenn für alle $x \in M$ $|x-x_o|^2 \max_M \lambda F'''(x)/2\cdot 3 \leq |x-x_o| \lambda F''(x_o)/2$ gilt.
Dies ist aber wegen $F''' = 0$ immer der Fall.

Vertauscht man die Rollen von j und k, so erhält man überschaubarere Vergleichskriterien.

Satz 1o.5.9

Sei $F \in \tilde{G}^{n,j}(M, \mathbb{I})$, und für $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < j$ gelte $k \in K^n_F$. Dann folgt:

(1) Es kann nicht gelten $T^{n,k}_{K^k_F} F \leq R^{n,j}_{K^j_F} F$.

(2) Es ist $R^{n,j}_{K^j_F} F \leq T^{n,k}_{K^k_F} F$ genau dann, wenn für alle $x \in M$ gilt

$$\sum_{\substack{i<j\\ i\notin K^j_F}} (x-x_o)^{i-k} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!} \subset (F^{(k)}(M) - F^{(k)}(x_o)) - \sum_{\substack{i<j\\ i\in K^j_F}} (x-x_o)^{i-k} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!}$$
$$- (x-x_o)^{j-k} \frac{[-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dotplus \varphi F^{(j)}(M)}{(k+1) \cdot\cdot \cdot\cdot \cdot\cdot j}.$$

Beweis. (1) Angenommen, es ist $T^{n,k}_{K^k}F \leq R^{n,j}_{K^j_F}F$. Dann folgt insbesondere die Inklusion $F^{(k)}(M) - F^{(k)}(x_o) \subset \dot{0}$. Daraus folgt aber notwendigerweise $\lambda F^{(k)}(x_o) = o$ im Widerspruch zu $k \in K^n_F$.
(2) Der Beweis von (2) ist klar.

Satz 1o.5.1o
Sei $F \in \tilde{G}^{n,j}(M, \mathbb{R})$, und für $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < j$ gelte $k \notin K^n_F$. Dann folgt:
(1) Aus $T^{n,k}_{K^k}F \leq R^{n,j}_{K^j}F$ folgt $K^k_F = K^j_F$ und die Gleichheit $T^{n,k}_{K^k}F = R^{n,j}_{K^j}F$.
(2) Es ist $R^{n,j}_{K^j}F \leq T^{n,k}_{K^k}F$ genau dann, wenn für alle $x \in M$ gilt

$$\sum_{\substack{i=k+1 \\ i \notin K^j_F}}^{j-1} (x-x_o)^{i-k} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!} \subset (F^{(k)}(M) \ominus F^{(k)}(x_o)) - \sum_{i \in K^j_F \setminus K^k_F} (x-x_o)^{i-k} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!}$$
$$- (x-x_o)^{j-k} \frac{[-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dotplus \varphi F^{(j)}(M)}{(k+1)\ldots\ldots\ldots j}.$$

Beweis. (1) Es sei etwa $x_o = a$. Dann erhält man aus der Annahme $T^{n,k}_{K^k}F \leq R^{n,j}_{K^j}F$ die Gültigkeit von $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ und die Inklusion

$$-\sum_{i \in K^j_F \setminus K^k_F} (x-x_o)^{i-k} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!} - (x-x_o)^{j-k} \frac{[-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dotplus \varphi F^{(j)}(M)}{(k+1)\ldots\ldots\ldots j}$$
$$\subset \sum_{\substack{i=k+1 \\ i \notin K^j_F}}^{j-1} (x-x_o)^{i-k} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!}$$

für alle $x \in M$.
Wegen $k \notin K^n_F$ folgt nach Schema (S) aus § 7 $(\lambda F)^{(k)}(x_o) \geqslant o$. Somit besitzt $(\lambda F)^{(k)}$ in x_o wegen $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ ein globales Maximum. Also folgt $(\lambda F)^{(k+1)}(x_o) \leqslant o$. Wegen obiger Inklusion kann nicht $(k+1) \in K^n_F$ gelten. Man erhält weiter $F^{(k+1)}(x_o) = \dot{0}$.
Also folgt $(\lambda F)^{(k+2)}(x_o) \leqslant o$. Wiederum aus obiger Inklusion erhält man die Gültigkeit von $F^{(k+2)}(x_o) = \dot{0}$, usw.. Schließlich erhält man $F^{(j-1)}(x_o) = \dot{0}$ und $[-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 = \varphi F^{(j)}(M)$. Also gilt $R^{n,j}_{K^j}F = T^{n,k}_{K^k}F + \dot{0}$, d.h. die Behauptung.
(2) Der Beweis von (2) ist klar.

Folgerung 1o.5.11
(1) Falls unter den Voraussetzungen von 1o.5.1o $K^k_F \neq K^j_F$ ist, so kann nie $T^{n,k}_{K^k}F \leq R^{n,j}_{K^j}F$ eintreten (vgl. denBeweis zu 1o.5.1o).
(2) Es ist $R^{n,j}_{K^j}F = T^{n,k}_{K^k}F$ unter den Voraussetzungen von 1o.5.1o genau dann, wenn (a) $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$,
(b) $F^{(k+i)}(x_o) = \dot{0}$ für $i = 1,..,n-k-1$ und

(c) $[-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 = \gamma F^{(j)}(M)$ gelten.

Für I-Funktionen $F \in \tilde{G}^{n,s}$ läßt sich also abschließend folgendes über die Approximationen der Form $T^{n,k}_{K^k}F$ bzw. $R^{n,s}_{K^s}F$ sagen:

1) Für $1 \leq k < s$ ist die Approximation $R^{n,s}_{K^s}F$ immer die günstigere unter den beiden für F.

2) Für $s < k \leq n$ sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Falls $s \in K^n_F$ ist, dann ist bis auf eine genau charakterisierbare Ausnahmemenge $T^{n,k}_{K^k}F$ der Approximation $R^{n,s}_{K^s}F$ vorzuziehen.

b) Falls $s \notin K^n_F$ ist, dann ist für $K^s_F = K^k_F$ immer $R^{n,s}_{K^s}F$ und für $K^s_F \neq K^k_F$ bis auf eine genau charakterisierbare Ausnahmemenge $R^{n,s}_{K^s}F$ vorzuziehen.

Im Anschluß sollen die Untersuchungen auf den Fall $F \in (\tilde{C}^{n,s} \setminus \tilde{G}^{n,s})$ ausgedehnt werden.

Satz 1o.5.12

Sei $F \in (\tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{H}) \setminus \tilde{G}^{n,k}(M, \mathbb{H}))$, und sei $k \in K^n_F$. Dann folgt für $k < j \leq n$

(1) Es kann nicht gelten $R^{n,k}_{K^k}F \leq T^{n,j}_{K^j}F$.

(2) Es ist $T^{n,j}_{K^j}F \leq R^{n,k}_{K^k}F$ genau dann, wenn für alle $x \in M$ gilt

$$\sum_{\substack{i=k+1 \\ i \notin K^i_F}}^{j-1} (x-x_o)^{i-k} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!} + (x-x_o)^{j-k} \frac{F^{(j)}(M)}{(k+1)..j} \subset$$

$$((\gamma F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2) - F^{(k)}(x_o)) - \sum_{\substack{i \in K^i_F \setminus K^k_F \\ i > k}} (x-x_o)^{i-k} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!}.$$

Beweis. (1) Angenommen, es ist $R^{n,k}_{K^k}F \leq T^{n,j}_{K^j}F$. Dann folgt insbesondere die Inklusion $(\gamma F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2) - F^{(k)}(x_o) \ni 0$. Daraus folgt aber notwendig $\lambda F^{(k)}(x_o) = o$ mit Widerspruch zu $k \in K^n_F$.

Der Beweis zu (2) ist klar.

Satz 1o.5.13

Sei $F \in (\tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{H}) \setminus \tilde{G}^{n,k}(M, \mathbb{H}))$ und $k \notin K^n_F$. Dann folgt für $k < j \leq n$

(1) Es kann nicht gelten $R^{n,k}_{K^k}F \leq T^{n,j}_{K^j}F$.

(2) Es ist $T^{n,j}_{K^j}F \leq R^{n,k}_{K^k}F$ genau dann, wenn für alle $x \in M$ gilt

$$\sum_{\substack{i=k+1 \\ i \notin K^i_F}}^{j-1} (x-x_o)^{i-k} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!} + (x-x_o)^{j-k} \frac{F^{(j)}(M)}{(k+1)..j} \subset$$

$$(\gamma F^{(k)}(M) \ominus F^{(k)}(x_o)) - \sum_{i \in K^j_F \setminus K^k_F} (x-x_o)^{i-k} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!}.$$

Beweis. (1) Angenommen, es gilt $R_{K^k}^{n,k}F \subset T_{K^j}^{n,j}F$. Dann folgt aber mit bekannten Mitteln die Inklusion

$$\varphi F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \subset F^{(k)}(x_o).$$

Wegen $F \in \tilde{C}^{n,k}$ und $k \notin K_F^n$ folgt andererseits $\lambda F^{(k)}(x_o) = o$. Also gilt auch $\min_M \lambda F^{(k)}(x) = \lambda(\varphi F^{(k)}(M))$ mit Widerspruch zu $F \notin \tilde{G}^{n,k}$.
Der Beweis von (2) ist klar.

Satz 1o.5.14
Sei $F \in (\tilde{C}^{n,j}(M, \mathbb{I}) \setminus \tilde{G}^{n,j}(M, \mathbb{I}))$, und sei $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \le k < j$ und $k \in K_F^n$.

(1) Dann kann nicht gelten $T_{K^k}^{n,k}F \subset R_{K^j}^{n,j}F$.

(2) Es ist $R_{K^j}^{n,j}F \subset T_{K^k}^{n,k}F$ genau dann, wenn für alle $x \in M$ gilt

$$\sum_{i=k+1}^{j-1}(x-x_o)^{i-k}\frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!} + (x-x_o)^{j-k}\frac{\varphi F^{(j)}(M) \dot{+} [-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2}{(k+1)\ \dots\ \dots\ \dots j}$$

$$\subset (F^{(k)}(M) - F^{(k)}(x_o)) - \sum_{\substack{i=k+1 \\ i \in K_F^j}}^{j-1}(x-x_o)^{i-k}\frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!}.$$

Der Beweis von 1o.5.14 verläuft analog zu dem von 1o.5.12.
Die nächste Aussage fällt etwas aus dem Rahmen, denn es gilt

Satz 1o.5.15
Sei $F \in (\tilde{C}^{n,j}(M, \mathbb{I}) \setminus \tilde{G}^{n,j}(M, \mathbb{I}))$, und für $k < j$ gelte $k \notin K_F^n$.

(1) Es ist $T_{K^k}^{n,k}F \subset R_{K^j}^{n,j}F$ genau dann, wenn gilt

(a) $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$,

(b) $F^{(k+i)}(x_o) = o$ für $i = 1,..,j-k-1$ und

(c) $[-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \subset \varphi F^{(j)}(M)$.

(2) Es gilt $R_{K^j}^{n,j}F \subset T_{K^k}^{n,k}F$ genau dann, wenn für alle $x \in M$

$$\sum_{\substack{i=k+1 \\ i \notin K_F^j}}^{j-1}(x-x_o)^{i-k}\frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!} + (x-x_o)^{j-k}\frac{\varphi F^{(j)}(M) \dot{+} [-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2}{(k+1)\ \dots\ \dots\ \dots j}$$

$$\subset (F^{(k)}(M) \ominus F^{(k)}(x_o)) - \sum_{\substack{i=k+1 \\ i \in K_F^j}}^{j-1}(x-x_o)^{i-k}\frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!}.$$

Beweis. (1) Sei $T_{K^k}^{n,k}F \subset R_{K^j}^{n,j}F$. Dann folgt $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ und

$$-\sum_{i \in K_F^j \setminus K_F^k}(x-x_o)^{i-k}\frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!} \subset \sum_{\substack{i=k+1 \\ i \notin K_F^j}}^{j-1}(x-x_o)^{i-k}\frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!}$$

$$+ (x-x_o)^{j-k}\frac{\varphi F^{(j)}(M) \dot{+} [-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2}{(k+1)\ \dots\ \dots\ \dots j}$$

für alle $x \in M$.

Sei etwa $x_o = a$. Wegen $k \notin K_F^n$ ist dann $(\lambda F)^{(k)}(x_o) > o$. Denn sonst wäre wegen $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)\ F^{(j)} = \dot{Q}$ im Widerspruch zu $F \notin \tilde{G}^{n,j}$.
Damit besitzt $(\lambda F)^{(k)}$ in x_o ein globales Maximum, und es folgt $(\lambda F)^{(k+1)}(x_o) \leq o$. Andererseits folgt aus der umseitigen Inklusion, daß nicht $(k+1) \in K_F^n$ sein kann. Also ist $F^{(k+1)}(x_o) = \dot{c}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Wir bemerken weiter, daß wegen $F^{(k)}(x_o) \supset F^{(k)}(x)$ für alle $x \in M$ noch $\dot{Q} \subset F^{(k+1)}(x_o)$ folgt. Also gilt $F^{(k+1)}(x_o) = \dot{Q}$.
Durch sukzessives Anwenden dieser Schlußweise erhält man schließlich $F^{(k+i)}(x_o) = \dot{Q}$ für alle $i = 1,..,j-k-1$ und die Gültigkeit der Inklusion $\dot{Q} \subset \dot{\uparrow} F^{(j)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2$. Nun gilt für Intervalle $A, B \in \mathbb{I}$ mit $\lambda B \leq \lambda A$: Es ist $\dot{Q} \subset A \dot{+} B$ genau dann, wenn $-B \subset A$ gilt.
Also gilt auch Teil (c) der Behauptung.
Die Umkehr von (1) ist klar.
Auch der Beweis von (2) ist klar.

Bemerkung 1o.5.16

Die I-Funktionen F, die durch (a), (b), (c) aus 1o.5.15, (1) ausgezeichnet sind, sind recht speziell. Durch das folgende Beispiel ist gesichert, daß es überhaupt solche F gibt.
Sei $M = [-1,o]$, $x_o = -1$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [x^2, x^3+x+3]$ und $n \geq 2$ fest. Dann ist $F \in \tilde{C}^{n,2}$ und wegen $\min_M \lambda F''(x) = 2$, $\dot{\uparrow} F''(M) = [-2,1] \notin \tilde{G}^{n,2}$. Weiter gilt $1 \notin K_F^n$. Es soll überprüft werden, ob $T_{K^1}^{n,1} F \leq R_{K^2}^{n,2} F$ ist. Nach 1o.5.15, (1) ist dies genau dann der Fall, wenn $F'(M) = F'(x_o)$ und $[-1,1] \min_M \lambda F''(x)/2 \subset \dot{\uparrow} F''(M)$ gilt. Man rechnet leicht nach, daß beide Bedingungen erfüllt sind, d.h. es ist $T_{K^1}^{n,1} F \leq R_{K^2}^{n,2} F$.

Bemerkung 1o.5.17

(1) Es ist bemerkenswert, daß unter den Voraussetzungen von 1o.5.15 niemals die Gleichheit $R_{K^j}^{n,j} F = T_{K^k}^{n,k} F$ eintreten kann, denn sonst müßte $[-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 = \dot{\uparrow} F^{(j)}(M)$ gelten, was $F \notin \tilde{G}^{n,j}$ widerspricht (vergl. den Beweis zu 1o.5.15).

(2) Falls unter den Voraussetzungen von 1o.5.15 $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ ist und $K_F^k = K_F^j$, dann kann niemals $R_{K^j}^{n,j} F \leq T_{K^k}^{n,k} F$ gelten. Denn mit 1o.5.15, (2) würde sonst $F \in \tilde{G}^{n,j}$ folgen mit Widerspruch zur Voraussetzung.

Für $F \in (\tilde{C}^{n,s} \setminus \tilde{G}^{n,s})$ läßt sich also abschließend feststellen:
1) Für $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < s$ ist für $k \in K_F^n$ immer $R_{K^s}^{n,s} F$ der Approximation $T_{K^k}^{n,k} F$ für F vorzuziehen. Falls $k \notin K_F^n$ ist, so ist bis auf eine genau charakterisierbare Ausnahmemenge $R_{K^s}^{n,s} F$ vorzuziehen.

2) Für $k \in \mathbb{N}$ mit $s < k \leq n$ ist immer $T_{K^k}^{n,k}F$ der Approximation $R_{K^s}^{n,s}F$ für F vorzuziehen.

Zum Abschluß von 1o.5 sollen noch einige Beispiele betrachtet werden.

Beispiel 1o.5.18

Sei $M = [1/2,2]$, $x_o = 1/2$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [\ln x, x^2]$ und $n = 3$.
Dann ist $K_F^3 = \{1\}$ und $M_F^3 = \{3\}$. Wegen $\min_M \lambda F'''(x) = 1/4$ und $\Psi F'''(M) = [1/8,8]$ folgt $F \notin \tilde{G}^{3,3}$.
Es ist $F''(M) = F''(x_o)$, und daher ist wegen § 8 $T_{K^2}^{3,2}F$ minimales Element von $\langle \{T_{K^k}^{3,k}F / k \in \{1,2,3\}\}, \leq \rangle$.
Es soll überprüft werden, ob $R_{K^3}^{3,3}F$ und $T_{K^2}^{3,2}F$ vergleichbar sind.
Wir stellen zunächst fest, daß wegen $F''(M) = F''(x_o)$ und $K_F^2 = K_F^3$ nicht gelten kann $R_{K^3}^{3,3}F \leq T_{K^2}^{3,2}F$ (vergl. 1o.5.17,(2)).
Weiter gilt $[-1,1] \min_M \lambda F'''(x)/2 = [-1/8,1/8] \not\subset [1/8,8] = \Psi F'''(M)$.
Wegen 1o.5.15 kann daher auch nicht $T_{K^2}^{3,2}F \leq R_{K^3}^{3,3}F$ gelten.
Also ist in diesem Fall $T_K^{3,2}F$ minimal unter allen Approximationen der Form $T_{K^k}^{3,k}F$ bzw. $R_{K^j}^{3,j}F$ für F bzgl. der Ordnung $\leq$.

Beispiel 1o.5.19

Sei $M = [-1,o]$, $x_o = -1$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [x^3, e^x]$ und $n = 3$.
Dann ist $M_F^3 = \{1,3\}$ und $K_F^3 = \{1\}$. Weiter ist $G_F^3 = \{3\}$. Aus 8.3.3 folgt wegen $F^{(i)}(M) \neq F^{(i)}(x_o)$ für $i = 1,2$, daß $T_{K^3}^{3,3}F$ minimales Element von $\langle \{T_{K^k}^{3,k}F / k \in \{1,2,3\}\}, \leq \rangle$ ist. Damit erhält man $R_{K^3}^{3,3}F \leq T_{K^3}^{3,3}F$ wegen 9.5.1.
Wir wollen überprüfen, ob $R_{K^3}^{3,3}F$ minimal ist unter den betrachteten Approximationen für F.
Zunächst sei festgestellt, daß wegen 1o.5.9 nicht $T_{K^1}^{3,1}F \leq R_{K^3}^{3,3}F$ gelten kann. Wegen $F''(M) \neq F''(x_o)$ folgt aus 1o.5.15, daß auch nicht $T_{K^2}^{3,2}F \leq R_{K^3}^{3,3}F$ gelten kann.
Angenommen, es ist $R_{K^1}^{3,1}F \leq R_{K^3}^{3,3}F$. Dann müßte aber insbesondere $R_{K^1}^{3,1}F \leq T_{K^3}^{3,3}F$ folgen im Widerspruch zu 1o.5.12.
Also ist $R_{K^3}^{3,3}F$ minimal.

Beispiel 1o.5.2o

Sei $M = [1,2]$, $x_o = 1$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [x^3/3, 3+(1/x)]$ und $n = 4$.
Dann ist $M_F^4 = \{1,2,3\}$, $G_F^4 = \{1\}$ und $K_F^4 = \{1,3\}$.
Nach § 8 ist dann also $T_{K^4}^{4,4}F$ minimales Element von $\langle \{T_{K^k}^{4,k}F / k \in \{1,..,4\}\}, \leq \rangle$.
Wir behaupten, daß $T_{K^4}^{4,4}F$ minimal ist unter allen Approximationen der Form

$T^{4,k}_{K^k}F$ bzw. $R^{4,j}_{K^j}F$, $j \in M^4_F$. Dazu genügt es zu zeigen, daß für kein k aus $\{1,2,3\} = M^3_F$ $R^{4,k}_{K^k}F \leq T^{4,4}_{K^4}F$ und $R^{4,k}_{K^k}F \neq T^{4,4}_{K^4}F$ gelten kann.
Es ist $1 \in G^4_F$ und $1 \in K^4_F$. Da $F'(x_o) \neq \bigcap_M F'(x)$ ist, so folgt nach 1o.5.3, daß nicht $R^{4,1}_{K^1}F \leq T^{4,4}_{K^4}F$ gelten kann.
Es ist $2 \in M^4_F$ und $2 \notin G^4_F$. Wegen $2 \notin K^4_F$ folgt daher aus 1o.5.13, daß nicht $R^{4,2}_{K^2}F \leq T^{4,4}_{K^4}F$ gelten kann.
Es ist $3 \in M^4_F$, $3 \notin G^4_F$ und $3 \in K^4_F$. Daher kann nach 1o.5.12 auch nicht $R^{4,3}_{K^3}F \leq T^{4,4}_{K^4}F$ gelten.
Damit ist gezeigt,daß $T^{4,4}_{K^4}F$ minimales Element ist.

1o.6 Ein Vergleich zwischen den $R^{n,k}_{K^k_F}F$ und $R^{n,j}_{K^j_F}F$ für $F \in \tilde{C}^n$ mit $M^n_F \neq \emptyset$ und $k,j \in M^n_F$.

Für 1o.6 sei stets vorausgesetzt, daß für die betrachteten I-Funktionen $F \in \tilde{C}^n$ immer $M^n_F \neq \emptyset \neq K^n_F$ ist. Es soll dann untersucht werden, welche der Approximationen $R^{n,j}_{K^j_F}F$, $j \in M^n_F$, die bestmögliche Einschließung für F bietet. Es würde genügen, diese Untersuchungen nur für die Menge G^n_F durchzuführen. Denn die Ergebnisse von 1o.6 werden dazu benötigt, ein minimales Element der geordneten Menge $\langle \{T^{n,k}_{K^k_F}F / k \in \{1,..,n\}\} \cup \{R^{n,j}_{K^j_F}F / j \in M^n_F\}, \leq \rangle$ zu konstruieren. Und dazu reicht die Betrachtung der Teilmenge G^n_F von M^n_F, wie in 1o.7 gezeigt werden wird (bis auf eine Ausnahme, vgl. 1o.7.3).
In ganz 1o.6 seien wieder $k,j \in \{1,..,n\}$ mit $k < j$. Dann gilt

Satz 1o.6.1
Sei $F \in \tilde{G}^{n,k}(M, \mathbb{I}) \cap \tilde{G}^{n,j}(M, \mathbb{I})$, und sei $k \in K^n_F$. Dann folgt

(1) Es ist $R^{n,k}_{K^k_F}F \leq R^{n,j}_{K^j_F}F$ genau dann, wenn
(a) $F^{(k)}(x_o) = [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(k)}(M)$ ist und
(b) für alle $x \in M$ gilt

$$\sum_{\substack{i=k+1 \\ i \in K^j_F}}^{j-1} |x-x_o|^{i-k} \frac{k!\,\lambda F^{(i)}(x_o)}{i!} + |x-x_o|^{j-k} \frac{\min_M \lambda F^{(j)}(x)}{(k+1)\,..\,..\,j} \leq \sum_{\substack{i=k+1 \\ i \notin K^j_F}}^{j-1} |x-x_o|^{i-k} \frac{k!\,\lambda F^{(i)}(x_o)}{i!}.$$

(2) Es ist $R^{n,j}_{K^j_F}F \leq R^{n,k}_{K^k_F}F$ genau dann, wenn für alle $x \in M$ gilt

$$\sum_{\substack{i=k+1 \\ i \notin K^j_F}}^{j-1} (x-x_o)^{i-k} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!} \subset ([-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(k)}(M)) \ominus F^{(k)}(x_o))$$

$$-\Big(\sum_{\substack{i=k+1 \\ i \in K^j_F}}^{j-1} (x-x_o)^{i-k} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!}\Big) - (x-x_o)^{j-k} \frac{[-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j)}(M)}{(k+1) \;\ldots\; \ldots \;\ldots j}.$$

Beweis. (1) Aus der Annahme $R^{n,k}_{K^k_F}F \leq R^{n,j}_{K^j_F}F$ erhält man mit bekannten Mitteln $F^{(k)}(x_o) = [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(k)}(M)$ und die Gültigkeit von

$$-\sum_{\substack{i=k+1 \\ i \in K^j_F}}^{j-1} (x-x_o)^{i-k} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!} - (x-x_o)^{j-k} \frac{[-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j)}(M)}{(k+1)\,..\,..\,..j}$$
$$\subset \sum_{\substack{i=k+1 \\ i \notin K^j_F}}^{j-1} (x-x_o)^{i-k} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!}$$

für alle $x \in M$. Aus obiger Gleichheit folgt weiter $\varphi F^{(k+i)} = o$ für alle $i \in \{1,..,n-k\}$. Also gilt $F^{(k+i)}(x_o) = [-1,1]\lambda F^{(k+i)}(x_o)/2$ für alle $i = 1,..,n-k-1$ und $\lambda(\varphi F^{(j)}(M)) = o$. Wendet man nun auf obige Inklusion

das λ-Funktional an, so erhält man die Behauptung.
Die Umkehr von (1) verläuft ähnlich. Der Beweis von (2) ist klar, wenn man noch $(-A) \dot{+} B = B \ominus A$ für Intervalle $A,B \in \mathbb{II}$ mit $\lambda B \leq \lambda A$ beachtet.

Unter den Voraussetzungen von 1o.6.1 ist also der Fall $R^{n,k}_{K^k} F \leq R^{n,j}_{K^j} F$ nur für recht spezielle $F \in \tilde{C}^n$ möglich; u.a. muß für diese F gelten: Die Ableitungsfunktionen $F^{(k+i)}$ sind symmetrisch für alle $i = 1,..,n-k$.

Folgerung 1o.6.2
Falls unter den Voraussetzungen von 1o.6.1 die Gleichheit
$F^{(k)}(x_o) = [-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(k)}(M)$ eintritt, dann folgt aus $R^{n,j}_{K^j} F \leq R^{n,k}_{K^k} F$ immer die Gleichheit $R^{n,j}_{K^j} F = R^{n,k}_{K^k} F$.

Ersetzt man in 1o.6.1 die Forderung $k \in K^n_F$ durch $k \notin K^n_F$, so erhält man sehr spezielle I-Funktionen F; für diese sind nämlich alle Ableitungsfunktionen $F^{(s)}$ symmetrisch für $k < s \leq n$. Es gilt

Satz 1o.6.3
Sei $F \in \tilde{G}^{n,k}(M, \mathbb{II}) \cap \tilde{G}^{n,j}(M, \mathbb{II})$ und sei $k \notin K^n_F$. Dann folgt

(1) Es ist $R^{n,j}_{K^j} F \leq R^{n,k}_{K^k} F$ genau dann, wenn
$$\sum_{\substack{i=k+1 \\ i \notin K^j_F}}^{j-1} |h|^{i-k-1} \frac{k!\,\lambda F^{(i)}(x_o)}{i!} \leq \sum_{\substack{i=k+1 \\ i \in K^j_F}}^{j-1} |h|^{i-k-1} \frac{k!\,\lambda F^{(i)}(x_o)}{i!} + |h|^{j-k-1} \frac{\min_M \lambda F^{(j)}(x)}{(k+1)\,..\,j}$$
für alle $x \in M$ ist, wobei $h = (x-x_o)$ ist für $x \in M$.

(2) Es ist $R^{n,k}_{K^k} F \leq R^{n,j}_{K^j} F$ genau dann, wenn für alle $x \in M$ die zu (1) duale Ungleichung gilt für alle $x \in M$.

Beweis. Wegen $F \in \hat{G}^{n,k}$ und $k \notin K^n_F$ gilt zunächst $\lambda(\varphi F^{(k)}(M)) = o$ und damit $\varphi F^{(k+i)} = o$ für alle $i = 1,..,n-k$.
(1) Es gelte $R^{n,j}_{K^j} F \leq R^{n,k}_{K^k} F$. Wegen $F^{(k)}(x_o) = [-1,1]\min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(k)}(M)$ erhält man daraus die Inklusion
$$-\sum_{\substack{i=k+1 \\ i \in K^j_F}}^{j-1} h^{i-k-1} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!} - h^{i-k-1} \frac{[-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j)}(M)}{(k+1) \;\ldots\; \ldots \;\ldots j} \geq \sum_{\substack{i=k+1 \\ i \notin K^j_F}}^{j-1} h^{i-k-1} \frac{k!F^{(i)}(x_o)}{i!}$$
für alle $x \in M$. Da die Ableitungsfunktionen $F^{(k+i)}$ von F symmetrisch sind für $i = 1,..,n-k$, so erhält man die Behauptung durch Anwenden des λ-Funktionals auf obige Inklusion wegen $\varphi F^{(j)}(M) = o$.
Die Umkehr von (1) und der Beweis von (2) verlaufen ähnlich.

Für den folgenden Abschnitt 1o.7 wird noch das folgende Ergebnis benötigt.

Satz 1o.6.4

Sei $F \in (\tilde{C}^{n,k}(M, \mathbb{I}) \setminus \tilde{G}^{n,k}(M, \mathbb{I})) \cap \tilde{G}^{n,j}(M, \mathbb{I})$. Dann kann nie die Beziehung $R^{n,k}_{K^k} F \leq R^{n,j}_{K^j} F$ eintreten.

Beweis. Angenommen, es gilt $R^{n,k}_{K^k} F \leq R^{n,j}_{K^j} F$.
Falls $k \in K^n_F$ ist, dann erhält man daraus die Inklusion
$(\varphi F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2) - F^{(k)}(x_o) \subset \dot{0}$, d.h. es ist $F^{(k)}(x_o) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Das ist aber ein Widerspruch zu $k \in K^n_F$.
Falls $k \in K^n_F$ ist, dann erhält man aus der Annahme die Inklusion $\varphi F^{(k)}(M) \dot{+} [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \subset F^{(k)}(x_o)$. Andererseits ist aber wegen $F \in \tilde{C}^{n,k}$ und $k \notin K^n_F$ auch $(\lambda F)^{(k)}(x_o) = o$. Aus obiger Inklusion folgt daher sofort $\min_M \lambda F^{(k)}(x) = \lambda(\varphi F^{(k)}(M))$ mit Widerspruch zu $F \notin \tilde{G}^{n,k}$.

Analog gilt der

Satz 1o.6.5

Sei $F \in \tilde{G}^{n,k}(M, \mathbb{I}) \cap (\tilde{C}^{n,j}(M, \mathbb{I}) \setminus \tilde{G}^{n,j}(M, \mathbb{I}))$. Dann kann nicht gelten $R^{n,k}_{K^k} F \leq R^{n,j}_{K^j} F$.

Beweis. Zunächst gilt $k \in K^n_F$. Denn wegen $F \in \tilde{G}^{n,k}$ würde sonst $\lambda(\varphi F^{(k)}(M)) = o$ und damit $\varphi F^{(j)} = o$ folgen, d.h. insbesondere $F \in \tilde{G}^{n,j}$ mit Widerspruch.
Angenommen nun, es ist $R^{n,k}_{K^k} F \leq R^{n,j}_{K^j} F$. Dann folgt aber u.a. die Inklusion $F^{(k)}(x_o) \subset [-1,1] \min_M \lambda F^{(k)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(k)}(M)$ und wegen $F \in \tilde{G}^{n,k}$ daher die Gleichheit. Daraus folgt aber $\varphi F^{(j)}(M) = \dot{0}$ mit Widerspruch zu $F \notin \tilde{G}^{n,j}$.

Ähnlich beweist man den

Satz 1o.6.6

Sei $F \in \tilde{C}^n(M, \mathbb{I})$ mit $k,j \in M^n_F$ und $k,j \notin G^n_F$. Dann folgt: Es kann nicht gelten $R^{n,k}_{K^k} F \leq R^{n,j}_{K^j} F$.

Beispiel 1o.6.7

Sei $M = [o,1]$, $x_o = o$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \longrightarrow [e^x, e+\sin x]$ und $n = 7$.
Es ist $F \in \tilde{C}^7$ und man bestätigt leicht, daß $M^7_F = \{1,2,..,6,7\}$ ist.
Wegen $\min_M \lambda F'(x) = o$ und $\lambda(\varphi F'(M)) > o$ ist $F \notin \tilde{G}^{7,1}$.
Es ist $\min_M \lambda F''(x) = 1 > \lambda(\varphi F''(M)) = \lambda[1/2, (e-\sin 1)/2]$. Also folgt $F \in \tilde{G}^{7,2}$.
Wegen $\min_M \lambda F'''(x) = 2 > \lambda(\varphi F'''(M)) = \lambda[o, (e-\cos 1)/2]$ ist $F \in \tilde{G}^{7,3}$.
Es ist $\min_M \lambda F^{(4)}(x) = 1 < \lambda(\varphi F^{(4)}(M)) = \lambda[1/2, (e+\sin 1)/2]$ folgt $F \notin \tilde{G}^{7,4}$.

Wegen $F^{(4+i)} = F^{(i)}$ für $i = 1,2,3$ folgt weiter $5 \notin G_F^7$ und $6,7 \in G_F^7$.
Man erhält also $G_F^7 = \{2,3,6,7\}$. Weiter ist $K_F^7 = \{2,3,4,6\}$.
Es soll überprüft werden, welche der Approximationen $R_{K_j}^{7,j}F$, $j \in M_F^7$, für F die hier günstigste Einschließung liefert.
Wegen 1o.6.4 gilt zunächst für kein $i \in M_F^7$ mit $i \notin G_F^7$ $R_{K_i}^{7,i}F \leq R_{K_7}^{7,7}F$.
Notwendig dafür, daß für ein $s \in G_F^7$ mit $s \neq 7$ $R_{K_s}^{7,s}F \leq R_{K_7}^{7,7}F$ gilt, ist wegen $s \in K_F^7$ nach 1o.6.1 die Gültigkeit von $F^{(s)}(x_o) = [-1,1] \min_M \lambda F^{(s)}(x)/2 \dot{+} \gamma F^{(s)}(M)$. Wir zeigen als nächstes, daß diese Gleichheit für kein s aus $\{2,3,6\}$ eintreten kann. Es ist

$F''(x_o) = [o,1] \neq [-1,1] \min_M \lambda F''(x)/2 \dot{+} \gamma F''(M) = [(e-1-\sin 1)/2,1]$,

$F'''(x_o) = [-1,1] \neq \ldots \qquad \ldots = [(e-2-\cos 1)/2,1]$, und

wegen $F^{(6)} = F''$ kann auch die dritte Gleichheit nicht eintreten.
Wir haben also insgesamt gezeigt, daß für kein $j \in M_F^7$ mit $j \neq 7$ $R_{K_j}^{7,j}F \leq R_{K_7}^{7,7}F$ gelten kann, d.h. $R_{K_7}^{7,7}F$ ist minimales Element der geordneten Menge $\langle \{R_{K_j}^{7,j}F / j \in M_F^7\}, \leq \rangle$.

Als nächstes soll eine Vorschrift angegeben werden, mit deren Hilfe man für jedes $F \in \tilde{C}^n$ mit $M_F^n \neq \emptyset \neq K_F^n$ ein minimales Element von $\langle \{R_{K_j}^{n,j}F / j \in M_F^n\}, \leq \rangle$ angeben kann.

Als unmittelbare Folgerung der bisherigen Aussagen erhält man den

Hilfssatz 1o.6.8

Sei $F \in \tilde{C}^n(M, \mathbb{I})$ und $n_r = \max M_F^n$. Dann folgt: Falls $n_r \notin G_F^n$, oder falls $G_F^n = \{n_r\}$ ist, dann ist $R_{K_{n_r}}^{n,n_r}F$ minimales Element von $\langle \{R_{K_j}^{n,j}F / j \in M_F^n\}, \leq \rangle$.

Wegen 1o.6.8 sind also nur noch die I-Funktionen F zu betrachten, für die $|G_F^n| \geq 2$ und $n_r = \max M_F^n \in G_F^n$ erfüllt sind. Für solche I-Funktionen F kann man nun mit Hilfe der folgenden zwei Mengen entscheiden, für welches $k_o \in M_F^n$ $R_{K_{k_o}}^{n,k_o}F$ minimal ist: Sei $L_F^n = K_F^n \cap G_F^n$ und

$V_F^n = \{ j \in L_F^n / F^{(j)}(x_o) = [-1,1] \min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \gamma F^{(j)}(M) \}$.

Zunächst gilt der

Hilfssatz 1o.6.9

Sei $F \in \tilde{C}^n(M, \mathbb{I})$ mit $|G_F^n| \geq 2$ und $n_r = \max M_F^n \in G_F^n$. Weiter gelte $L_F^n \neq \emptyset \neq V_F^n$.
Dann ist $R_{K_{k_o}}^{n,k_o}F$ minimales Element von $\langle \{R_{K_j}^{n,j}F / j \in M_F^n\}, \leq \rangle$, wobei $k_o = \min V_F^n$ ist.

Beweis. Sei $k_o = \min V_F^n$. Wir stellen zunächst fest, daß dann für alle $j \in M_F^n$ mit $j > k_o$ immer $j \in G_F^n$ folgt. Denn es ist $\gamma F^{(k_o+i)} = o$ für alle i aus

$\{1,..,n-k_o\}$ wegen $F^{(k_o)}(x_o) = [-1,1]\min_M \lambda F^{(k_o)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(k_o)}(M)$.
Sei zunächst $j \in M_F^n$ mit $j > k_o$. Dann folgt also $j \in G_F^n$. Angenommen, es ist $R_{K^j}^{n,j}F \leq R_{K^{k_o}}^{n,k_o}F$. Nach Voraussetzung ist aber $k_o \in V_F^n$, und daher folgt aus 1o.6.2, daß dann $R_{K^j}^{n,j}F = R_{K^{k_o}}^{n,k_o}F$ gelten muß.
Sei nun $j \in M_F^n$, $j \notin G_F^n$ und $j < k_o$. Dann folgt wegen 1o.6.4, daß nie $R_{K^j}^{n,j}F \leq R_{K^{k_o}}^{n,k_o}F$ gelten kann.
Nun zum letzten Fall $j \in G_F^n$ und $j < k_o$. Falls $j \in K_F^n$ ist, dann kann nicht $R_{K^j}^{n,j}F \leq R_{K^{k_o}}^{n,k_o}F$ gelten, denn sonst wäre wegen 1o.6.1
$F^{(j)}(x_o) = [-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j)}(M)$ im Widerspruch zu $j < k_o = \min V_F^n$.
Sei also $j \notin K_F^n$. Dann folgt wegen 9.2.7 $\lambda F^{(j)}(x_o) = o$ und $\varphi F^{(j+i)} = o$ für $i = 1,..,n-j$. Insbesondere folgt also $F \in \tilde{G}^{n,j+1}$. Weiter gilt wegen $F^{(j)}(x_o) = \dot{c}$, $c \in \mathbb{R}$, und $\varphi F^{(j+1)}(M) = \dot{0}$ $R_{K^{j+1}}^{n,j+1}F \leq R_{K^j}^{n,j}F$. (Für Intervalle $A,B \in \mathbb{I}$ mit $\lambda B \leq \lambda A$ gilt $A \dot{+} B \subset A$ genau dann, wenn $\dot{o} \subset B$ ist.)
Angenommen, es gilt $R_{K^j}^{n,j}F \leq R_{K^{k_o}}^{n,k_o}F$, dann folgt insbesondere $R_{K^{j+1}}^{n,j+1}F \leq R_{K^{k_o}}^{n,k_o}F$. Falls $(j+1) = k_o$ ist, so folgt die Gleichheit $R_{K^j}^{n,j}F = R_{K^{k_o}}^{n,k_o}F$.
Falls $(j+1) < k_o$ ist, dann kann nicht $(j+1) \in K_F^n$ gelten. Denn wegen 1o.6.1 müßte sonst $F^{(j+1)}(x_o) = [-1,1]\min_M \lambda F^{(j+1)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j+1)}(M)$ sein, was aber wegen $(j+1) < k_o = \min V_F^n$ nicht sein kann. Also gilt $F^{(j+1)}(x_o) = \dot{0}$, und damit $R_{K^j}^{n,j}F = R_{K^{j+1}}^{n,j+1}F$.

Wegen $F \in \tilde{G}^{n,j+1}$ und $\lambda F^{(j+1)}(x_o) = o$ folgt nun weiter $F \in \tilde{G}^{n,j+2}$ und $R_{K^{j+2}}^{n,j+2}F \leq R_{K^{j+1}}^{n,j+1}F$, usw. . Schließlich erhält man die Existenz eines $i \in \mathbb{N}$ mit $F \in \tilde{G}^{n,j+i}$, $(j+i) = k_o$ und $R_{K^{j+i}}^{n,j+i}F \leq R_{K^j}^{n,j}F$. Also folgt in jedem Falle die Gleichheit $R_{K^j}^{n,j}F = R_{K^{k_o}}^{n,k_o}F$.
Wir haben damit gezeigt, daß für kein $j \in M_F^n$ mit $j \neq k_o$ der Fall $R_{K^j}^{n,j}F \leq R_{K^{k_o}}^{n,k_o}F$ und $R_{K^j}^{n,j}F \neq R_{K^{k_o}}^{n,k_o}F$ eintreten kann, d.h. $R_{K^{k_o}}^{n,k_o}F$ ist das gewünschte minimale Element.

Nun zu den beiden übrigen Fällen:

Hilfssatz 1o.6.1o

Sei $F \in \tilde{C}^n(M, \mathbb{I})$ mit $|G_F^n| \geq 2$, $n_r = \max M_F^n \in G_F^n$ und $V_F^n = \emptyset$. Dann folgt:

(1) Falls $L_F^n \neq \emptyset$ ist, dann ist $R_{K^{n_r}}^{n,n_r}F$ minimales Element der geordneten Menge $\langle \{R_{K^j}^{n,j}F \,/\, j \in M_F^n\}, \leq \rangle$, wobei $n_r = \max G_F^n$ $(= \max M_F^n)$ ist.

(2) Falls $L_F^n = \emptyset$ ist, dann gilt $n \in G_F^n$, und es ist $R_{K^n}^{n,n}F$ das gesuchte minimale Element.

Beweis. (1) Zunächst kann wegen 1o.6.4 nicht $R_{K^j}^{n,j}F \leq R_{K^{n_r}}^{n,n_r}F$ gelten für $j \in M_F^n$ mit $j \notin G_F^n$. Auch für $j \in L_F^n$ kann dieser Fall wegen 1o.6.1 nicht eintreten, da sonst $V_F^n \neq \emptyset$ wäre im Widerspruch zur Voraussetzung. Es bleibt also nur noch der Fall $j \in G_F^n$ und $j \notin K_F^n$.

Hier schließt man nun ähnlich wie beim entsprechenden Fall des Beweises zu 1o.6.9. Also gilt (1).

(2) Sei $n_1 = \min G_F^n$. Wegen $L_F^n = \emptyset$ ist dann $\lambda F^{(n_1)}(x_o)$ = o und daher $\varphi F^{(n_1+i)} = o$ für alle $i = 1,..,n-n_1$.

Wegen $F \in \tilde{G}^{n,n_1}$ und $\lambda F^{(n_1)}(x_o) = o$ folgt nach 9.2.1o $F \in \tilde{C}^{n,n_1+1}$. Da $\varphi F^{(n_1+1)} = o$ ist, so gilt auch $F \in \tilde{G}^{n,n_1+1}$.

Setzt man diese Schlußweise fort, so erhält man schließlich $F \in \tilde{G}^{n,n_1+i}$ für alle $i = 1,..,n-n_1$ und die Gültigkeit von $F^{(n_1+i)}(x_o) = o$ für alle $i = 1,..,n-n_1-1$. Wegen $\varphi F^{(n_1+i)}(x_o) = o$ für $i = o,1,..,n-n_1-1$ erhält man weiter die Gültigkeit von $R_{K^{n_1}}^{n,n_1}F = R_{K^{n_1+1}}^{n,n_1+1}F = .. = R_{K^{n-1}}^{n,n-1}F$.

Beachtet man weiter die für Intervalle $A,B \in \mathbb{I}$ mit $\lambda B \leq \lambda A$ gültige Beziehung: Es ist $A \dot{+} B \subset A$ genau dann, wenn $o \subset B$ ist, so erhält man schließlich noch $R_{K^n}^{n,n}F \leq R_{K^{n_1}}^{n,n_1}F$. Also ist $R_{K^n}^{n,n}F$ bzgl. der Ordnung $\leq$ für I-Funktionen besser oder gleich jedem $R_{K^j}^{n,j}F$ mit $j \in G_F^n$.

Für $j \in M_F^n$ mit $j \notin G_F^n$ kann wegen 1o.6.4 nie $R_{K^j}^{n,j}F \leq R_{K^n}^{n,n}F$ gelten.

Also ist $R_{K^n}^{n,n}F$ das gesuchte minimale Element.

Mittels der Hilfssätze 1o.6.8 bis 1o.6.1o kann man nun für jedes $F \in \tilde{C}^n$ mit $M_F^n \neq \emptyset \neq K_F^n$ ein minimales Element unter den $R_{K^j}^{n,j}F$, $j \in M_F^n$, bestimmen. Das Verfahren hierzu wird wieder übersichtlicher, wenn man es in Form eines Algorithmus schreibt. Zuvor sollen noch einige Beispiele betrachtet werden.

Beispiel 1o.6.11 (vergl. auch 1o.6.7)

Sei $M = [o,1]$, $x_o = o$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [e^x, e+\sin x]$ und $n = 7$.

Dann ist $F \in \tilde{C}^7$, $M_F^7 = \{1,2,..,6,7\}$, $G_F^7 = \{2,3,6,7\}$ und $K_F^7 = \{2,3,4,6\}$.

Weiter ist $L_F^7 = G_F^7 \cap K_F^7 = \{2,3,6\}$ und $V_F^7 = \emptyset$ (vergl. 1o.6.7).

Mit Hilfe von 1o.6.1o folgt dann, daß $R_{K^7}^{7,7}F$ minimales Element unter den $R_{K^j}^{7,j}F$, $j \in M_F^7$, ist.

Beispiel 1o.6.12

Sei $M = [1,2]$, $x_o = 1$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [-1,1]\,1/x$ und $n = 1o$.

Dann ist $F \in \tilde{C}^{1o}$, $M_F^{1o} = \{1,3,5,7,9\} = G_F^{1o} = K_F^{1o} = L_F^{1o}$, und man rechnet leicht nach, daß $V_F^{1o} = \emptyset$ ist. Nach 1o.6.1o ist dann also $R_{K^9}^{1o,9}F$ das gesuchte minimale Element.

Zum Abschluß von § 1o.6 soll nun der angekündigte Algorithmus konstruiert werden.

Algorithmus Ⓗ

Voraussetzungen: Sei $F \in \tilde{C}^n(M, \Pi)$ mit $M_F^n \neq \emptyset \neq K_F^n$

1) Bestimmung von M_F^n und von $n_r = \max M_F^n$.

2) Falls $n_r \notin G_F^n$ ist, so setze $k_o = n_r$, sonst

3) Bestimmung von G_F^n.

4) Falls $G_F^n = \{n_r\}$ ist, so setze $k_o = n_r$, sonst führe H_1 aus

H_1

1) Bestimmung von K_F^n und von $L_F^n = G_F^n \cap K_F^n$.

2) Falls $L_F^n = \emptyset$ ist, so setze $k_o = n$, sonst

3) Bestimmung von V_F^n.

4) Falls $V_F^n \neq \emptyset$ ist, so setze $k_o = \min V_F^n$, sonst

5) setze $k_o = n_r$.

Dann gilt für das durch Ⓗ eindeutig bestimmte k_o: Es ist $R^{n,k_o}_{K_F^{k_o}} F$ minimales Element der geordneten Menge $\langle \{R^{n,j}_{K_F^j} F \,/\, j \in M_F^n\}, \leq \rangle$.

Will man also ein $F \in \tilde{C}^n$ mit $M_F^n \neq \emptyset \neq K_F^n$ durch I-Funktionen der Form $R^{n,j}_{K_F^j} F$, $j \in M_F^n$, einschließen, so kann man mit Hilfe des Algorithmus Ⓗ entscheiden, welches unter den $R^{n,j}_{K_F^j} F$ die unter den gegebenen Umständen beste (= minimale) Einschließung für F ist.

1o.7 Ein Algorithmus zum Auffinden eines minimalen Elements von $\langle \{T^{n,k}_{K^n_F} F \,/\, k \in \{1,..,n\}\} \cup \{R^{n,j}_{K^n_F} F \,/\, j \in M^n_F\}, \leq \rangle$ für I-Funktionen $F \in \tilde{C}^n(M, \mathbb{I})$ mit $M^n_F \neq \emptyset \neq K^n_F$

Für die in 1o.7 betrachteten I-Funktionen $F \in \tilde{C}^n$ gelte stets $M^n_F \neq \emptyset \neq K^n_F$. Für Funktionen dieser Art kann man nun für jedes $k \in \{1,..,n\}$ die einschließenden Approximationen $T^{n,k}_{K^n_F} F$ bzw. für jedes $j \in M^n_F$ die einschließenden Approximationen $R^{n,j}_{K^n_F} F$ für F bilden. Für die Praxis ist es natürlich wichtig zu wissen, welche unter diesen Approximationen die für F bestmögliche Einschließung ist, d.h. ein minimales Element dieser Elemente bzgl. der Ordnung $\leq$ für I-Funktionen.

In 1o.7 soll ein Algorithmus angegeben werden, der für jedes $F \in \tilde{C}^n$ mit den anfangs geforderten Voraussetzungen solch ein minimales Element liefert. (Wir schreiben wieder kurz $R^{n,j}_{K^n_F} F$ statt $R^{n,j}_{K^n_F} F$ usw. .)

Sei $F \in \tilde{C}^n$, und F genüge den obigen Voraussetzungen. Weiter sei k_o das nach dem Algorithmus (B) aus § 8 eindeutig bestimmte Element aus $\{1,..,n\}$ mit : $T^{n,k_o}_{K^n_F} F$ ist minimales Element von $\langle \{T^{n,k}_{K^n_F} F \,/\, k \in \{1,..,n\}\}, \leq \rangle$. Mit $k_r = \max K^n_F$ gilt dann $k_r \leq k_o$; insbesondere ist also $k_o \notin K^n_F$, und es ist $k_o = n$, falls kein $k \in \{k_r+1,..,n-1\}$ existiert mit $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$, bzw. es gilt $k_o = \min \{k \,/\, k \in \{k_r+1,..,n-1\},\ F^{(k)}(x_o) = F^{(k)}(M)\}$ sonst.

Zunächst gilt

Hilfssatz 1o.7.1

Sei $F \in \tilde{C}^n(M, \mathbb{I})$ mit $M^n_F \neq \emptyset \neq K^n_F$. Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen:

(1) Für alle $j \in (M^n_F \setminus G^n_F)$ mit $j \neq k_o$ kann nie $R^{n,j}_{K^n_F} F \leq T^{n,k_o}_{K^n_F} F$ gelten.

(2) Falls $k_o \in M^n_F$ ist, dann folgt im Falle $k_o < n$ $k_o \in G^n_F$ und $R^{n,k_o}_{K^n_F} F = T^{n,k_o}_{K^n_F} F$, für $k_o = n$ gilt $R^{n,n}_{K^n_F} F \leq T^{n,n}_{K^n_F} F$.

Beweis. (1) Sei $j \in (M^n_F \setminus G^n_F)$. Für $j < k_o$ folgt die Behauptung sofort aus 1o.5.12 und 1o.5.13. Sei nun $j > k_o$, d.h. es ist $k_o < n$ und $F^{(k_o)}(M) = F^{(k_o)}(x_o)$. Wegen $\max K^n_F < k_o$ ist nun aber $K^j_F = K^{k_o}_F$. Mit 1o.5.17 folgt auch hier die Behauptung.

(2) Sei $k_o \in M^n_F$, und es gelte etwa $x_o = a$. Falls $k_o < n$ ist, dann folgt wegen 9.2.7 $(\lambda F)^{(k_o)}(x_o) = o$ und daher wegen $F^{(k_o)}(M) = F^{(k_o)}(x_o)$ weiter $F^{(k_o)} = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und daraus $R^{n,k_o}_{K^n_F} F = T^{n,k_o}_{K^n_F} F$.
Falls $k_o = n$ ist, dann folgt die Behauptung aus 9.5.1, (2).

Für das Folgende wird noch die nächste Aussage benötigt:

Hilfssatz 1o.7.2

Sei $F \in \tilde{C}^n(M, \mathbb{I})$ mit $M_F^n \neq \emptyset \neq K_F^n$, und es gelte $L_F^n \neq \emptyset = V_F^n$ (zur Definition von L_F^n und V_F^n vergl. § 1o.6).
Dann gilt entweder $\max G_F^n \in L_F^n$ oder $\max G_F^n = n$.

Beweis. Es ist klar, daß sich die beiden Aussagen gegenseitig ausschließen. Angenommen, es ist $n_r = \max G_F^n < n$ und es gilt $n_r \notin L_F^n$.
Nach Definition von L_F^n muß dann $(\lambda F)^{(n_r)}(x_o) = o$ sein. Da $n_r \in G_F^n$ ist, so folgt daraus $\varphi F^{(n_r)} = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und daher weiter $\varphi F^{(n_r+1)} = o$.
Wegen $n_r \in M_F^n$ und $(\lambda F)^{(n_r)}(x_o) = o$ folgt aber wegen 9.2.1o auch $F \in \tilde{C}^{n,n_r+1}$ und daraus wegen $\varphi F^{(n_r+1)} = o$ weiter $F \in \tilde{G}^{n,n_r+1}$, d.h. es ist $(n_r+1) \in G_F^n$ mit Widerspruch zu $n_r = \max G_F^n$.

Bei der Konstruktion des gesuchten Algorithmus werden nun die beiden Fälle $k_o = n$ bzw. $k_o < n$ unterschieden.

Fall (a): Sei $k_o = n$

Zunächst gilt der

Hilfssatz 1o.7.3

Sei $F \in \tilde{C}^n(M, \mathbb{I})$ mit $M_F^n \neq \emptyset \neq K_F^n$. Dann gilt

(1) Falls $n \in (M_F^n \setminus G_F^n)$ ist oder falls $G_F^n = \{n\}$ gilt, dann ist $R_{K_n}^{n,n}F$ minimal (d.h. minimales Element von $\langle \{T_{K^k}^{n,k}F / k \in \{1,..,n\}\} \cup \{R_{K^n}^{n,j} / j \in M_F^n\}, \leq \rangle$).

(2) Falls $G_F^n = \emptyset$ ist und $n \notin M_F^n$, dann ist $T_{K^n}^{n,n}F$ minimal.

Beweis. (1) Falls $n \in (M_F^n \setminus G_F^n)$ ist, dann ist nach 1o.6.8 $R_{K_n}^{n,n}F$ minimales Element unter den $R_{K^n}^{n,j}F$, $j \in M_F^n$. Wegen 9.5.1 ist weiter $R_{K_n}^{n,n}F \leq T_{K^n}^{n,n}F$.
Also gibt es auch kein $k \in \{1,..,n\}$ mit $T_{K^k}^{n,k}F \leq R_{K^n}^{n,n}F$ und $T_{K^k}^{n,k}F \neq R_{K^n}^{n,n}F$, da $T_{K^n}^{n,n}F$ sonst nicht minimal wäre unter den $T_{K^s}^{n,s}F$, $s \in \{1,..,n\}$.
Der andere Fall folgt ähnlich.
(2) Diese Aussage folgt sofort aus 1o.5.12 und 1o.5.13.

Wegen 1o.7.3 kann man sich im folgenden auf I-Funktionen $F \in \tilde{C}^n$ beschränken, für die gilt: Es ist $G_F^n \neq \emptyset$, und falls $n \in M_F^n$ gilt, dann folgt $n \in G_F^n$ und $|G_F^n| \geq 2$. Wir setzen für die in den folgenden Aussagen von Fall (a) betrachteten I-Funktionen stets diese Eigenschaften voraus.

Hilfssatz 1o.7.4

Sei $F \in \tilde{C}^n(M, \mathbb{I})$ mit $M_F^n \neq \emptyset \neq K_F^n$. Falls $L^n \neq \emptyset \neq V_F^n$ ist, dann ist $R_{K^{j_o}}^{n,j_o}F$ minimal, wobei $j_o = \min V_F^n$ ist.

Beweis. Wegen 1o.6.9 genügt es, die Approximationen $T_{K^k}^{n,k}F$, $k \in \{1,..,n\}$,

zu betrachten.

Sei zunächst $k < j_o$. Falls $k \in K_F^n$ ist , dann kann wegen 1o.5.9 nicht $T_{K'}^{n,k}F \leq R_{K'}^{n,j_o}F$ gelten. Auch für $k \notin K_F^n$ kann dieser Fall nicht eintreten. Denn aus der Annahme $T_{K'}^{n,k}F \leq R_{K'}^{n,j_o}F$ folgt dann insbesondere $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ mit Widerspruch zur Voraussetzung $k_o = n$ (vergl. auch mit Algorithmus Ⓑ aus § 8).

Sei nun $j_o < k$ (für $j_o = k$ gilt ja $R_{K'}^{n,j_o}F \leq T_{K'}^{n,j_o}F$ nach 9.5.1). Angenommen, es ist $T_{K'}^{n,k}F \leq R_{K'}^{n,j_o}F$. Nun gilt aber $j_o \in V_F^n$, d.h. es ist $F^{(j_o)}(x_o) = [-1,1]\min_M \lambda F^{(j_o)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j_o)}(M)$. Wir hatten aber schon in 1o.5.1 gezeigt, daß dann die Gleichheit $T_{K'}^{n,k}F = R_{K'}^{n,j_o}F$ folgen muß. Also gilt die Behauptung.

Hilfssatz 1o.7.5

Sei $F \in \tilde{C}^n(M, \mathrm{II})$ mit $M_F^n \neq \emptyset \neq K_F^n$. Dann folgt

(1) Falls $L_F^n \neq \emptyset = V_F^n$ gilt, dann ist $R_{K''}^{n,n}F$ bzw. $T_{K''}^{n,n}F$ minimal, je nachdem, ob $n \in M_F^n$ ist oder $n \notin M_F^n$.

(2) Falls $L_F^n = \emptyset$ ist, dann folgt $n \in G_F^n$, und es ist $R_{K''}^{n,n}F$ minimal.

Beweis. (1) Wegen 1o.7.2 ist dann entweder $\max G_F^n \in L_F^n$ (d.h. $n \notin M_F^n$) oder $\max G_F^n = n$ (d.h. $n \in M_F^n$).

Sei zunächst $n \notin M_F^n$. Es ist zu zeigen, daß dann $T_{K''}^{n,n}F$ minimal ist. In 1o.7.1 wurde bereits gezeigt, daß für $j \in (M_F^n \setminus G_F^n)$ nie $R_{K'}^{n,j}F \leq T_{K''}^{n,n}F$ gelten kann für $j \neq n$.

Sei also $j \in G_F^n$. Dann kann für $j \in K_F^n$ nicht $R_{K'}^{n,j}F < T_{K''}^{n,n}F$ gelten, da sonst wegen 1o.5.1 $V_F^n \neq \emptyset$ wäre mit Widerspruch.

Sei nun $j \notin K_F^n$. Wegen $\max G_F^n \in L_F^n$ existiert dann das $\min\{j' / j' \in L_F^n,\ j < j'\}$, das mit j_1 bezeichnet werden soll. Für dieses j_1 folgt nun die Gültigkeit von $R_{K'}^{n,j_1}F \leq R_{K'}^{n,j}F$: Denn sei etwa $x_o = a$. Zunächst folgt dann mit 9.2.7 $(\lambda F)^{(j)}(x_o) = o$, woraus wegen 9.2.1o $F \in C^{n,j+1}$ folgt. Wegen $F \in G^{n,j}$ folgt aber auch $\varphi F^{(j+i)} = o$ für alle $i = 1,..,n-j$ und daher auch $F \in \tilde{G}^{n,j+1}$.

Nun ist entweder $(j+1) \in K_F^n$, und dann folgt die Behauptung mit $j_1 = (j+1)$. Denn es ist ja $F^{(j)}(x_o) = [-1,1]\min_M \lambda F^{(j)}(x)/2 \dot{+} \varphi F^{(j)}(M)$, und es gilt $\varphi F^{(j+1)}(M) = O$. Damit folgt dann $R_{K'}^{n,j+1}F \leq R_{K'}^{n,j}F$, wenn man noch die Gültigkeit von $A \dot{+} B \subset A$ für Intervalle $A,B \in \mathrm{II}$ mit $\lambda B \leq \lambda A$ und $O \subset B$ beachtet.

Falls dagegen $(j+1) \notin K_F^n$ ist, dann folgt $F^{(j+1)}(x_o) = O$. Man schließt nun wie vorher weiter auf $F \in \tilde{C}^{n,j+2}$ und $F \in \tilde{G}^{n,j+2}$. Setzt man diese Schlußweise fort, so erhält man schließlich $R_{K'}^{n,j}F = R_{K'}^{n,j+1}F = .. = R_{K'}^{n,j_1-1}F \geq R_{K'}^{n,j_1}F$.

Angenommen nun, es ist $R^{n,j_1}_{K^j}F \leq T^{n,n}_{K^n}F$, dann gilt insbesondere $R^{n,j_1}_{K^{j_1}}F \leq T^{n,n}_{K^n}F$. Wegen 1o.5.1 folgt nun daraus wieder $j_1 \in V^n_F$, und das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.
Damit ist der Fall $n \notin M^n_F$ bewiesen.

Sei nun $n \in M^n_F$ und damit auch $n \in G^n_F$ nach Voraussetzung. Wegen 9.5.1 gilt dann zunächst $R^{n,n}_{K^n}F \leq T^{n,n}_{K^n}F$. Wir wissen weiter, daß $R^{n,n}_{K^n}F$ minimales Element unter den $R^{n,j}_{K^j}F$, $j \in M^n_F$, ist (vergl. 1o.6.1o).
Sei nun $k \in \{1,..,n-1\}$. Dann kann für $k \in K^n_F$ nach 1o.5.9 nicht $T^{n,k}_{K^k}F \leq R^{n,n}_{K^n}F$ gelten. Auch für $k \notin K^n_F$ kann dies nicht eintreten. Denn aus der Annahme $T^{n,k}_{K^k}F \leq R^{n,n}_{K^n}F$ folgt leicht die Gültigkeit von $F^{(k)}(M) = F^{(k)}(x_o)$ mit Widerspruch zu $k_o = n$.

(2) Sei nun $L^n_F = \emptyset$. Wegen 1o.7.2 folgt dann $n \in G^n_F$. Mit $n_1 = \min G^n_F$ folgt weiter $F \in \tilde{G}^{n,n_1+i}$ für $i = 1,..,n-n_1$ und $F^{(n_1+i)}(x_o) = 0$ für $i = 1,..,n-n_1-1$. Daraus erhält man nun $R^{n,n_1}_{K^{n_1}}F = R^{n,n_1+1}_{K^{n_1+1}}F = .. = R^{n,n-1}_{K^{n-1}}F \geq R^{n,n}_{K^n}F$. Also ist $R^{n,n}_{K^n}F$ minimales Element der $R^{n,j}_{K^j}F$, $j \in M^n_F$ (vergl. auch 1o.6.1o,(2)).
Man zeigt nun mit den gleichen Argumenten wie in (1), daß für kein $k \in \{1,..,n-1\}$ der Fall $T^{n,k}_{K^k}F \leq R^{n,n}_{K^n}F$ eintreten kann. Also gilt auch Teil (2) der Behauptung.

Damit ist Fall (a) vollständig behandelt. Es sollen einige Beispiele betrachtet werden.

Beispiel 1o.7.6

Sei $M = [o,1]$, $x_o = o$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \longmapsto [e^x, e+\sin x]$ und $n = 7$.
Dann ist $M^7_F = \{1,2,..,6,7\}$, $G^7_F = \{2,3,6,7\}$, $K^7_F = \{2,3,4,6\}$. Weiter ist $L^7_F = \{2,3,6\}$ und $V^7_F = \emptyset$.
Mit Hilfe des Algorithmus (B) aus § 8 erhält man weiter $k_o = 7$.
Es ist $\max G^7_F = 7$, d.h. es ist $n \in G^n_F$, und damit folgt aus 1o.7.5, daß $R^{7,7}_{K^7}F$ die günstigste Einschließung für F ist unter allen Approximationen der Form $T^{7,k}_{K^k}F$, $k \in \{1,..,7\}$, bzw. der Form $R^{7,j}_{K^j}F$, $j \in M^7_F$.

Beispiel 1o.7.7

Sei $M = [1,2]$, $x_o = 1$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \longmapsto [-1,1]\,1/x$ und $n = 1o$.
Dann ist $M^{1o}_F = G^{1o}_F = K^{1o}_F = L^{1o}_F = \{1,3,5,7,9\}$. Weiter ist $V^{1o}_F = \emptyset$.
Mit Hilfe des Algorithmus (B) aus § 8 erhält man schließlich $k_o = 1o$.
Es ist $\max G^{1o}_F = 9 \in L^{1o}_F$, $1o \notin M^{1o}_F$. Damit folgt aus 1o.7.5, daß $T^{1o,1o}_{K^{1o}}F$ die für F günstigste Einschließung ist unter allen Approximationen von der Form $T^{1o,k}_{K^k}F$, $k \in \{1,..,1o\}$, bzw. von der Form $R^{1o,j}_{K^j}F$, $j \in M^{1o}_F$.

Fall (b): Sei $k_o < n$

Als Analogon zu 1o.7.3 erhält man

Hilfssatz 1o.7.8

Sei $F \in \tilde{C}^n(M, \mathbb{I})$ mit $M_F^n \neq \emptyset \neq K_F^n$. Dann gilt:

(1) Falls $k_o \in M_F^n$ ist, dann folgt $k_o \in G_F^n$ und $R_{K^{k_o}}^{n,k_o}F = T_{K^{k_o}}^{n,k_o}F$. Falls weiter $k_o = \min G_F^n$ ist, dann ist $R_{K^{k_o}}^{n,k_o}F$ minimal.

(2) Falls $G_F^n = \emptyset$ ist, dann ist $T_{K^{k_o}}^{n,k_o}F$ minimal.

Beweis. (1) Nach Konstruktion ist $k_o \notin K_F^n$. Aus $F \in \tilde{C}^{n,k_o}$ folgt andererseits $k_o \in K_F^n$ oder $(\lambda F)^{(k_o)}(x_o) = o$ nach 9.2.7 . Also folgt die Gültigkeit von $F^{(k_o)}(x_o) = \dot{c} = F^{(k_o)}(M)$ für ein $\dot{c} \in R$. Weiter ist $F^{(k_o+i)} = \dot{0}$ für alle $i = 1,..,n-k_o$. Damit folgen $k_o \in G_F^n$ und $R_{K^{k_o}}^{n,k_o}F = T_{K^{k_o}}^{n,k_o}F$.

Falls $k_o = \min G_F^n$ ist, dann folgt sofort, daß $R_{K^{k_o}}^{n,k_o}F$ minimales Element der $R_{K^j}^{n,j}F$, $j \in M_F^n$, ist. Nach Konstruktion von k_o gibt es dann auch kein $k \in \{1,..,n\}$ mit $T_{K^k}^{n,k}F \leq R_{K^{k_o}}^{n,k_o}F$ und $T_{K^k}^{n,k}F \neq R_{K^{k_o}}^{n,k_o}F$. Also gilt (1).

Aussage (2) folgt sofort aus 1o.7.1.

Wegen 1o.7.8 können wir im folgenden voraussetzen, daß für die betrachteten I-Funktionen $F \in \tilde{C}^n$ stets gilt:
1) Es ist $G_F^n \neq \emptyset$ und 2) Falls $k_o \in M_F^n$ ist, dann folgt $k_o < \min G_F^n$.

Wir hatten schon gezeigt, daß für I-Funktionen $F \in \tilde{C}^n$ mit $L_F^n \neq \emptyset \neq V_F^n$ die Approximation $R_{K^{j_o}}^{n,j_o}F$, wobei $j_o = \min V_F^n$ ist, minimales Element ist (vergl. 1o.7.4). Nun zum Fall $V_F^n = \emptyset$:

Hilfssatz 1o.7.9

Sei $F \in \tilde{C}^n(M, \mathbb{I})$ mit $M_F^n \neq \emptyset \neq K_F^n$. Dann folgt:

(1) Falls $L_F^n \neq \emptyset = V_F^n$ ist, dann ist $T_{K^{k_o}}^{n,k_o}F$ bzw. $R_{K^{n_r}}^{n,n_r}F$ minimal, je nachdem, ob für $n_r = \max G_F^n$ $n_r \in L_F^n$ oder $n_r = n$ gilt.

(2) Falls $L_F^n = \emptyset$ ist, dann ist $n_r = \max G_F^n$ und $R_{K^{n_r}}^{n,n_r}F$ ist minimales Element der geordneten Menge $\langle \{T_{K^k}^{n,k} / k \in \{1,..,n\}\} \cup \{R_{K^j}^{n,j}F / j \in M_F^n\}, \leq \rangle$.

Beweis. (1) Es gelte zunächst $n_r = \max G_F^n \in L_F^n$. Wegen 1o.7.1 brauchen dann die $j \in (M_F^n \setminus G_F^n)$ nicht berücksichtigt zu werden . Weiter ist klar, daß für $j \in L_F^n$ nie $R_{K^j}^{n,j}F \leq T_{K^{k_o}}^{n,k_o}F$ gelten kann (vgl. mit 1o.5.1). Es bleibt also der Fall $j \in G_F^n$ und $j \notin K_F^n$. Dann ist aber $j > n_r > k_o$, und in diesem Fall erhält man die Behauptung ähnlich wie beim Beweis zu 1o.7.5,(1).
Also ist für $n_r \in L_F^n$ $T_{K^{k_o}}^{n,k_o}F$ minimales Element.
Sei nun $n_r = n$. Dann ist zunächst $R_{K^n}^{n,n}F$ minimal unter den $R_{K^j}^{n,j}F$, $j \in M_F^n$, nach 1o.6.1o. Nach 1o.5.9 kann für $j < k_o$ mit $j \in K_F^n$ nicht $T_{K^j}^{n,j}F < R_{K^n}^{n,n}F$

gelten. Für $j < k_o$ mit $j \notin K_F^n$ folgt aus $T_{K^j}^{n,j}F \leq R_{K^n}^{n,n}F$ stets die Gleichheit.
Für $j > k_o$ gilt nach Konstruktion von k_o $K_F^{k_o} = K_F^j$; daher folgt in diesem Fall wegen 1o.5.6 aus $T_{K^j}^{n,j}F \leq R_{K^n}^{n,n}F$ die Gleichheit.
Also gilt auch für $n_r = n$ die Behauptung.
(2) Es ist $L_F^n = \emptyset$. Sei $n_1 = \min G_F^n$. Dann ist $\varphi F^{(n_1+i)} = o$ für alle $i = 1,..,n-n_1$ und für diese i gilt weiter $F \in \tilde{G}^{n,n_1+i}$ wegen 9.2.1o.
Weiterhin folgt $F^{(n_1+i)}(x_o) = o$ für $i = 1,..,n-n_1-1$.
Wir stellen weiter fest, daß nicht $n_1 \leq k_o$ gelten kann. Denn sonst wäre nach dem eben Gezeigten und wegen 3.5.3 $F^{(n_1)} = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und daher auch $F^{(n_1)}(M) = F^{(n_1)}(x_o)$ mit Widerspruch zur Konstruktion von k_o.
Also kann höchstens $k_o \leq n_1$ gelten. Der Fall $k_o = n_1$ wurde schon in 1o.7.8 behandelt, so daß wir uns auf $n_1 > k_o$ beschränken können.
Nach dem oben Gezeigten gilt nun $R_{K^{n_1}}^{n,n_1}F = R_{K^{n_1}}^{n,n_1+1}F = .. = R_{K^{n-1}}^{n,n-1}F \geq R_{K^n}^{n,n}F$.
Damit ist $R_{K^n}^{n,n}F$ minimal unter den $R_{K^j}^{n,j}F$, $j \in M_F^n$.
Aus 1o.5.9 folgt weiter, daß für $k \in \{1,..,n-1\}$ mit $k \in K_F^n$ nicht $T_{K^k}^{n,k}F \leq R_{K^n}^{n,n}F$ gelten kann. Für $k \notin K_F^n$ folgt wegen 1o.5.1o aus $T_{K^k}^{n,k}F \leq R_{K^n}^{n,n}F$ die Gleichheit.
Also ist $R_{K^n}^{n,n}F$ minimales Element.

Damit ist auch der Fall (b) vollständig behandelt. Es sollen noch einige Beispiele dazu behandelt werden.

Beispiel 1o.7.1o

Sei $M = [1,2]$, $x_o = 1$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \longmapsto [-1,1]\,1/x$ und $n = 11$.
Dann ist $M_F^{11} = \{1,3,5,7,9,11\} = G_F^{11}$ und $K_F^{11} = \{1,3,5,7,9\} = L_F^{11}$.
Da für alle $j \in L_F^{11}$ $F^{(j)}(x_o) \neq \bigcap_M F^{(j)}(x)$ gilt, so folgt weiter $V_F^{11} = \emptyset$.
Mit Hilfe des Algorithmus (B) aus § 8 erhält man weiter $k_o = 1o$.
Nun ist $11 = \max G_F^{11} \notin L_F^{11}$, und daher ist nach 1o.7.9, (1) $R_{K^{11}}^{11,11}F$ minimales Element von $\langle \{T_{K^k}^{11,k}F \,/\, k \in \{1,..,11\}\} \cup \{R_{K^j}^{11,j}F \,/\, j \in M_F^{11}\}, \leq \rangle$.

Beispiel 1o.7.11

Sei $M = [1,2]$, $x_o = 1$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \longmapsto [x^2, 4+(1/x)]$ und $n = 5$.
Dann ist $M_F^5 = \{1,2,3,5\}$, $G_F^5 = \{1\}$, $K_F^5 = \{1,3\}$ und $L_F^5 = \{1\}$.
Weiter ist $k_o = 4$. Wegen $F'(x_o) \neq \bigcap_M F'(x)$ ist weiter $V_F^5 = \emptyset$.
Es ist $n_r = \max G_F^5 = 1 \in L_F^5$. Wegen 1o.7.9 ist daher $T_{K^4}^{5,4}F$ minimales Element.

Zum Abschluß von § 1o.7 soll nun der angekündigte Algorithmus aufgestellt werden.

Algorithmus I

Voraussetzungen: Sei $F \in C^n(M, \mathbb{I})$ mit $M_F^n \neq \emptyset \neq K_F^n$.

1) Bestimmung von k_o mittels des Algorithmus (B) aus § 8.

2) Falls $k_o \in (M_F^n \setminus G_F^n)$ ist, oder falls $k_o = \min G_F^n$ ist, dann ist $R_{K^{k_o}}^{n,k_o} F$ minimal, sonst

3) Bestimmung von G_F^n.

4) Falls $G_F^n = \emptyset$ ist, dann ist $T_{K^{k_o}}^{n,k_o} F$ minimal, sonst führe I_1 aus.

I_1

1) Bestimmung von K_F^n und von $L_F^n = G_F^n \cap K_F^n$.

2) Falls $L_F^n = \emptyset$ ist, dann ist $R_{K^n}^{n,n} F$ minimal, sonst

3) Bestimmung von V_F^n.

4) Falls $V_F^n \neq \emptyset$ ist, dann ist $R_{K^{j_o}}^{n,j_o} F$ minimal, wobei $j_o = \min V_F^n$ ist, sonst

5) ist $R_{K^n}^{n,n} F$ bzw. $T_{K^n}^{n,n} F$ minimal, je nachdem, ob $n_r = \max G_F^n = n$, oder ob $n_r \in L_F^n$ ist.

Beispiel 1o.7.12

Sei $M = [-1,o]$, $x_o = -1$, $F: M \to \mathbb{I}$ mit $x \mapsto [\sinh x, \cosh x]$ und $n = 1oo$.
Dann ist $M_F^{1oo} = G_F^{1oo} = K_F^{1oo} = L_F^{1oo} = \{2n-1 \,/\, n = 1,2,..,5o\}$.
Da für alle Elemente $j \in L_F^{1oo}$ $F^{(j)}(x_o) \neq \bigcap_M F^{(j)}(x)$ ist, so folgt weiter $V_F^{1oo} = \emptyset$.
Weiter ist $k_o = 1oo = n$.
Wegen $\max G_F^{1oo} = 99 \in L_F^{1oo}$ folgt dann schließlich, daß unter den Approximationen der Form $T_{K^k}^{1oo,k} F$, $k \in \{1,..,1oo\}$, bzw. der Form $R_{K^j}^{1oo,j} F$, $j \in M_F^{1oo}$, $T_{K^{1oo}}^{1oo,1oo} F$ die für F bestmögliche Einschließung (bzgl. der Ordnung $\leq$) ist.

Literaturverzeichnis

[1] Alefeld, G. und J. Herzberger:
Einführung in die Intervallrechnung.
B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim 1974

[2] Apostolatos, N.:
Einige Ergänzungen zum Begriff des Rasters.
ZAMM 54, 517-518 (1974)

[3] Apostolatos, N. und U. Kulisch:
Grundlagen einer Maschinenintervallarithmetik.
Computing 2, 89-1o4 (1967)

[4] Frink, O.:
Ideals in partially ordered sets.
Amer. Math. Monthly 61, 223-234 (1954)

[5] Hansen, E.R. (Editor):
Topics in Interval Analysis.
Oxford University Press (1969)

[6] Hewitt, E. und K. Stromberg:
Real and Abstract Analysis.
Springer, Berlin 1975

[7] Krückeberg, F.:
Numerische Intervallrechnung und deren Anwendung.
Manuskript, Bonn 1966

[8] Kulisch, U.:
An Axiomatic Approach to Rounded Computations.
Num. Math. 18, 1-17 (1971)

[9] Kulisch, U. und W.L. Miranker:
Computer arithmetic in theory and practice.
IBM Research Report RC 7776 (#33658) 7/24/79, New York

[1o] Markov, S.M.:
Extended Intervall Arithmetic and some applications.
Freiburger Intervall-Berichte 78/4, Universität Freiburg (1978)

[11] Markov, S.M.:
Calculus for Interval Functions of a real variable.
Computing 22, 325-337 (1979)

[12] Mayer, O.:
Über die in der Intervallrechnung auftretenden Räume und einige Anwendungen.
Dissertation, Karlsruhe 1968

[13] Moore, R.E.:
Interval Analysis.
Prentice Hall, Englewood Cliffs 1966

[14] Natanson, I.P.:
Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen.
Akademie-Verlag Berlin, Berlin 1969

[15] Nickel, K.:
Über die Notwendigkeit einer Fehlerschranken-Arithmetik für Rechenautomaten.
Numer. Math. 9, 69-79 (1966)

[16] Nuding, E.:
Intervallarithmetik.
Rechenzentrum Heidelberg (1972)

[17] Ratschek, H.:
Die binären Systeme der Intervallarithmetik.
Computing 6, 295-308 (1970)

[18] Ratschek, H.:
Ergebnisse einer Untersuchung über die Struktur von Intervallpolynomen.
Berichte der GMD 52, Bonn 1972

[19] Ratschek, H.:
Teilbarkeitskriterien in der Intervallarithmetik.
J. Reine Angew. Math. 252, 128-138 (1972)

[20] Ratschek, H.:
Nichtnumerische Aspekte der Intervallarithmetik.
'Interval Mathematics', ed. by K. Nickel
Lecture Notes In Computer Science 29, 48-74 (1975)

[21] Ratschek, H.:
Mittelwertsätze für Intervallfunktionen.
Kuhnert, F. und J.Schmidt (Hrsg.): Beiträge zur numerischen Mathematik 6, 133-144, München 1977

[22] Ratschek, H.:
Optimal Approximations in Interval Analysis.
Interval Mathematics 1980, Academic Press, New York 1980

[23] Ratschek, H. und G.Schröder:
Über den quasilinearen Raum.
Manuskript, Düsseldorf 1971

[24] Ratschek, H. und G.Schröder:
Über die Ableitung von intervallwertigen Funktionen.
Computing 7, 172-187 (1971)

[25] Schmitgen, G.:
Tschebyscheff-Approximation von Intervallfunktionen durch verallgemeinerte Intervallpolynome.
Berichte der GMD 26, Bonn 1970

[26] Schröder, G.:
Differentiationsverfahren für Intervallfunktionen.
Dissertation, Düsseldorf 1971

[27] Schröder, G.:
Bemerkung zur Differentiation von intervallwertigen Funktionen.
Erscheint in Computing

[28] Skornjakow, L.A.:
Elemente der Verbandstheorie.
Akademie-Verlag Berlin, Berlin 1973

[29] Sunaga, T.:
Theory of an interval algebra and its applications to numerical analysis.
RAAG Memoirs 2, 29-46 (1958)

[30] Traub, J.F. und H.Woźniakowski:
A general Theory of Optimal Algorithms.
Academic Press, New York 1980

Herrn Prof. Dr. H. Ratschek danke ich für das Thema dieser Arbeit und für die Anregungen und Diskussionen während ihrer Anfertigung.

FOTODRUCK J. MAINZ – Telefon: (02 41) 2 73 05
Neupforte 13, Nähe Markt, 5100 Aachen